证明题专题 · 第 1 章 §8 & 第 3 章 §1

闭区间上连续函数的性质 × 微分中值定理

两块内容、一类思路：先证"存在"，再让导数说话

教材：齐民友主编 第二版上册 | 题型覆盖：证根、证 ξ、证不等式、双中值 | 含 10 道专项练习与详解

SECTION 0

为什么这两块总被放在一起考

它们表面上一个在第一章、一个在第三章，实际是同一件事的两半：

	闭区间连续函数性质	微分中值定理
问的是什么	函数值能不能取到某个数	导数能不能取到某个值
关键工具	零点定理、介值定理、最值定理	罗尔、拉格朗日、柯西
证明模式	构造 F，找两点**异号**或夹住 c	构造 F，找两点**相等**
结论形态	$f(\xi)=0$ 或 $f(\xi)=c$	$f'(\xi)=0$ 或含 $f'(\xi)$ 的等式

两者的手法几乎可以逐条对应：零点定理是"找异号"，罗尔定理是"找相等"；介值定理是"夹住常数"，拉格朗日是"夹住差商"。所以综合题经常是先用前半段定出一个点 ξ，再用后半段在 $[a,\xi]$ 与 $[\xi,b]$ 上各用一次中值定理——本资料第 3 节给的就是这类题。

一条通用心法

证明题里凡出现"**存在 ξ 使**……"，先问自己三个问题：

① 结论里有没有导数？**没有** → 走零点/介值（找异号或夹值）；**有** → 走中值定理（找两点相等）。

② 要构造的函数是什么？（把 ξ 换成 x，移项）

③ 定理的三个条件能不能逐条验证？——**写不出条件，就是没读懂题。**

PART 1

闭区间上连续函数的性质

1.1 四个定理：表述、条件、能干什么

定理	条件与结论	实际用途
有界性	$f\in C[a,b]\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界	为最值定理铺路；证明"函数值有上下限"
最值定理	$f\in C[a,b]\Rightarrow$ 存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$	给出 $m\le f(x)\le M$，是**介值定理的前置步骤**
零点定理	$f\in C[a,b]$，$f(a)f(b)<0\Rightarrow$ $\exists\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=0$	证方程有根（"至少一个"）
介值定理	$f\in C[a,b]$，$m\le\mu\le M\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]$，$f(\xi)=\mu$	证 $f(\xi)=c$ 型；证明值域是区间

条件里三个字最要命：闭、连续

① **必须闭区间**：$1/x$ 在 $(0,1)$ 连续却无界，x 在 $(0,1)$ 连续却取不到最值。
② **必须连续**：$1/x$ 在 $[-1,1]$ 上满足 $f(-1)<0<f(1)$，但区间内无零点，因为 $x=0$ 处断了。
③ **零点定理的结论在开区间**（$\xi\in(a,b)$），介值定理的 ξ 可能在端点。写的时候别写错。

1.2 题型一：证明方程有根（零点定理）

四步模板

1. **移项构造函数**：把方程写成 $F(x)=0$ 的形式（左减右）。
2. **指明区间**：写出"F 在 $[a,b]$ 上连续"——这一句是给分点，不能省。
3. **找异号两点**：优先试端点；端点不行试 $0,1,a,b$ 等特殊点；无穷区间先截取一个有界子区间。
4. **下结论**：由零点定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F(\xi)=0$，即原方程有根。

例 1-1（最基础，必须一次写对）

题：证明方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根。

> **思路**
> 看到"方程有根"就想零点定理。先把所有项移到一边：$F(x)=x-\cos x$。区间已经给了，直接看两端符号。

证明 令 $F(x)=x-\cos x$，则 F 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续。又

$$F(0)=0-1=-1<0,\qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}>0.$$

由零点定理，存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $F(\xi)=0$，即 $\xi=\cos\xi$。故方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根。

例 1-2（端点不好用，换特殊点）

题：证明方程 $x\cdot 2^x=1$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根。

> **思路**
> $F(x)=x\cdot 2^x-1$。$F(0)=-1<0$，$F(1)=2-1=1>0$，端点正好异号，一步到位。

证明 令 $F(x)=x\cdot 2^x-1$，F 在 $[0,1]$ 上连续。$F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，由零点定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$，即 $\xi\cdot 2^{\xi}=1$。

例 1-3（经典：截取子区间 + 端点恰好取等）

题：设 $a>0$，$b>0$。证明方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，且它不超过 $a+b$。

> **思路**
>
> "不超过 $a+b$"是在暗示区间取 $[0,a+b]$。看两端：$F(0)=-b<0$；
> $F(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b=a\left[1-\sin(a+b)\right]\geq 0$。右端可能**恰好等于 0**，所以不能直接说"异号"，要分情况——这是本题唯一的坑。

证明 令 $F(x)=x-a\sin x-b$，则 F 在 $[0,a+b]$ 上连续，且 $F(0)=-b<0$。
又 $F(a+b)=a\left[1-\sin(a+b)\right]\geq 0$。

若 $F(a+b)=0$，取 $\xi=a+b$ 即可；若 $F(a+b)>0$，则由零点定理，存在 $\xi\in(0,a+b)$ 使 $F(\xi)=0$。

两种情形下都有正根 $\xi\leq a+b$（$F(0)=-b\neq 0$，故 $\xi>0$）。

这个"分情况"的写法每年都有大批人漏掉，直接写"$F(0)F(a+b)<0$"是错的。

1.3 题型二：证明 $f(\xi)=c$（介值定理，通常要先用最值定理）

三步模板

1. 用**最值定理**写出 $m\leq f(x)\leq M$。
2. 验证 $m\leq c\leq M$（这一步是全部工作量所在，通常要做估计或取平均）。
3. 由**介值定理**得存在 ξ 使 $f(\xi)=c$。

例 1-4（平均数型，考得最多）

题：设 $f\in C[a,b]$，$x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$。证明存在 $\xi\in[a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i).$$

> **思路**
>
> 要证"f 取到某个值"，就检查这个值是否夹在最小值和最大值之间。一组数的平均数必在最小值与最大值之间——这就是全部想法。

证明 由最值定理，f 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 与最大值 M，即对一切 $x\in[a,b]$ 有 $m\leq f(x)\leq M$。
对每个 i 都有 $m\leq f(x_i)\leq M$，相加后除以 n 得

$$m\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leq M.$$

由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$。

例 1-5（端点平均，最简单的情形）

题：设 $f\in C[0,1]$，证明存在 $\xi\in[0,1]$，使 $f(\xi)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$。

证明 由最值定理，$m\le f(0)\le M$，$m\le f(1)\le M$，故 $m\le\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\le M$。由介值定理即得。

注意：这类题不能只写"由介值定理"，必须先交代 $m\le c\le M$，否则条件没验证。

1.4 题型三：不动点与"两点函数值相等"

识别特征

要证的等式**两边都含 f**，比如 $f(\xi)=\xi$、$f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$、$f(\xi)=1-\xi$。做法一律是：**把等式移成 $F(\xi)=0$，再看 F 在两点的符号**。

例 1-6（不动点，最经典的一道）

题：设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 连续。证明存在 $\xi\in[0,1]$，使 $f(\xi)=\xi$。

> **思路**
>
> 令 $F(x)=f(x)-x$。条件 f 的值域含于 $[0,1]$ 这个信息，正好用来定 F 在两端的符号：$F(0)=f(0)\ge 0$，$F(1)=f(1)-1\le 0$。两种极端都可能取等，所以要分情况。

证明 令 $F(x)=f(x)-x$，则 F 在 $[0,1]$ 上连续。由 $0\le f(x)\le 1$ 得

$$F(0)=f(0)-0=f(0)\ge 0,\qquad F(1)=f(1)-1\le 0.$$

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则 $\xi=0$ 或 $\xi=1$ 即为所求；否则 $F(0)>0>F(1)$，由零点定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

例 1-7（函数值相等型，考频很高）

题：设 $f \in C[0,1]$，且 $f(0)=f(1)$。证明存在 $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$，使 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$。

> **思路**
>
> 等式两边都是 f 的值，属于"两点函数值相等"。令 $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$，定义域只能取 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$（否则 $x+\frac{1}{2}$ 超出 $[0,1]$）。关键观察：$F(0)$ 与 $F\left(\frac{1}{2}\right)$ 恰好互为相反数，这一步靠 $f(0)=f(1)$。

证明 令 $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$，$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$。则 F 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上连续，且

$$F(0)=f(0)-f\left(\tfrac{1}{2}\right), \qquad F\left(\tfrac{1}{2}\right)=f\left(\tfrac{1}{2}\right)-f(1)=f\left(\tfrac{1}{2}\right)-f(0)=-F(0).$$

若 $F(0)=0$，取 $\xi=0$；否则 $F(0)$ 与 $F\left(\frac{1}{2}\right)$ 异号，由零点定理，存在 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 使 $F(\xi)=0$。

两种情形下都有 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$。

这个"F 两端互为相反数"的构造可以推广：$f(\xi)=f(\xi+\tau)$ 只要 f 以 τ 为"周期端点"（如 $f(0)=f(n\tau)$），就把区间取成 $[0, n\tau-\tau]$。

1.5 根的唯一性：在"存在"之后补一步

题目若问"**恰有一个**根"或"**唯**一根"，就在零点定理之后加一句单调性论证。

例 1-8

题：证明 $x=\cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有且仅有一个根。

证明 存在性同例 1-1。下面证唯一性：令 $F(x)=x-\cos x$，则 $F'(x)=1+\sin x>0$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内成立，故 F 严格单调递增，零点至多一个。结合存在性，根唯一。

"至多一个"用单调性；"至少一个"用零点定理。两句话合起来才叫"有且仅有一个"。

1.6 这一块的五个高频失分点

#	错误写法	正确做法
1	直接写"由零点定理……"，不交代连续性	必须先写"F 在 $[a,b]$ 上连续"
2	把端点符号写成"$F(a)F(b)<0$"，实际有一端为 0	先算具体值，遇 0 就单独讨论（如例 1-3）
3	用介值定理却不验证 $m \le c \le M$	先最值定理给出 m, M，再夹一次
4	要证"有且仅有一个"，只做了存在性	补单调性（或反证：设两个根，用罗尔）
5	区间取错：f 只在 $[0,1]$ 有定义，却用 $[0,2]$	构造 F 前先确认表达式在该区间有意义

PART 2

微分中值定理

2.1 四个定理其实是一条链

不要把它们当四个平行公式背。它们是一条证明链，后一个用前一个证出来：

依赖关系

费马定理 →（最值定理）→ **罗尔** →（减一条弦）→ **拉格朗日** →（换成参数曲线）→ **柯西**

所以：**罗尔是核心**，拉格朗日与柯西都是"把罗尔用在构造出来的函数上"。做题时你真正在用的，九成是罗尔。

定理	条件	结论	本质
费马	内点取极值，且在该点可导	$f'(\xi)=0$	极值点处切线水平
罗尔	$[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f(a)=f(b)$	$\exists \xi,\ f'(\xi)=0$	两端等高 ⇒ 中间有水平切线
拉格朗日	$[a,b]$ 连续，(a,b) 可导	$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$	存在切线平行于弦
柯西	同拉氏，且 $g'(x)\neq 0$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$	参数曲线上的拉格朗日

罗尔定理怎么来的（面试／大题第一问常考）

由最值定理，f 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 与最小值 m。若 $M=m$，f 恒为常数，任取 ξ 都有 $f'(\xi)=0$；若 $M>m$，由于 $f(a)=f(b)$，最大值与最小值中至少有一个不在端点，即在内点 ξ 取得，该点是极值点，由**费马定理** $f'(\xi)=0$。

注意这里三条条件各自的作用：连续 ⇒ 最值存在；可导 ⇒ 费马可用；端点相等 ⇒ 极值点落在内部。答题时把这三点都点到，就是满分。

2.2 核心技能：辅助函数怎么造

中值定理的题，难点从不是定理，而是**把要证的结论变成"某个函数 F 的罗尔定理"**。有一套可靠的做法。

三步法（原函数法）

1. 把结论中的 ξ **换成** x，得到一个含 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的等式。
2. 整理成 $f'(x)+P(x)f(x)=0$ 的标准形（把 f' 的系数化为 1）。
3. 两边乘积分因子 $e^{\int P(x)\,dx}$，左边就变成 $\left[f(x)e^{\int P\,dx}\right]'$，这个整体就是 $F(x)$。

示范：从 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$ 反推出 F

换元得 $f'(x)-2xf(x)=0$，此处 $P(x)=-2x$，$\int P\,dx=-x^2$，故

$$F(x)=e^{-x^2}f(x),\qquad F'(x)=e^{-x^2}\left[f'(x)-2xf(x)\right].$$

验证：$F'(\xi)=0 \iff f'(\xi)=2\xi f(\xi)$，正是要证的结论。

常用构造对照表（背下来，考场上直接取用）

要证的结论	辅助函数 $F(x)$	记忆点
$f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$e^{kx}f(x)$	通式，k 可正可负可为零
$f'(\xi)=f(\xi)$	$e^{-x}f(x)$	$k=-1$ 的特例
$\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$	$x^n f(x)$	系数是 ξ 的一次方，配 x^n
$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$	$\dfrac{f(x)}{x}$	即 $\xi f'-f=0$
$f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	商的导数分子
$f'(\xi)+f(\xi)\tan\xi=0$	$f(x)\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$f'(\xi)-f(\xi)\cot\xi=0$	$\dfrac{f(x)}{\sin x}$	$(\sin x)'=\cos x$
$f'(\xi)=2\xi$（右边是具体函数）	$f(x)-x^2$	减去右边的原函数
$f'(\xi)+f(\xi)=2$（右边是常数）	$e^x[f(x)-2]$	先移项再套通式

造出 F 之后，只差一步：验证 $F(a)=F(b)$

这是全题最容易翻车的地方。$F(a)=F(b)$ 通常来自题设条件（如 $f(a)=f(b)=0$）。**如果验证不出来，说明 F 造错了，或者题目给的条件还没用上。**不要硬着头皮往下写。

2.3 题型一：结论是 $f'(\xi)=0$

识别：结论里只有导数等于零，没有 $f(\xi)$。做法是**找两点函数值相等**，然后套罗尔。

例 2-1（多次使用罗尔）

题：设 f 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=f(2)=0$。证明 $f'(x)=0$ 在 $(0,2)$ 内至少有两个根。

> **思路**
>
> 给了三个零点，两两配对就是两个区间；每个区间用一次罗尔，得到两个不同的根。关键在于最后要说明这两根不相等（因为分属不相交的区间）。

证明 在 $[0,1]$ 上，f 连续、$(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使 $f'(\xi_1)=0$。
同理，在 $[1,2]$ 上由罗尔定理，存在 $\xi_2\in(1,2)$ 使 $f'(\xi_2)=0$。

因 $\xi_1<1<\xi_2$，故 $\xi_1\neq\xi_2$，即 $f'(x)=0$ 在 $(0,2)$ 内至少有两个根。

2.4 题型二：含 ξ 的等式（主力题型）

识别：结论形如"$f'(\xi)$ 与 $f(\xi)$ 的某个组合等于 0"。做法固定：**查上表造 F → 验证端点相等 → 罗尔 → 把 $F'(\xi)=0$ 还原成要证的式子**。

例 2-2（含参数，一题覆盖一类）

题：设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$。证明：对任意实数 λ，存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\lambda f(\xi).$$

> **思路**
>
> 移项：$f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0$。这正好是通式 $f'+kf=0$ 中 $k=-\lambda$ 的情形，故 $F=e^{-\lambda x}f(x)$。端点相等来自 $f(a)=f(b)=0$。$\lambda=1$ 时就是"$f'(\xi)=f(\xi)$"这个经典结论。

证明 令 $F(x)=e^{-\lambda x}f(x)$，则 F 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=e^{-\lambda a}f(a)=0,\qquad F(b)=e^{-\lambda b}f(b)=0,$$

即 $F(a)=F(b)$。由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$。而

$$F'(x)=e^{-\lambda x}\left[f'(x)-\lambda f(x)\right],$$

因 $e^{-\lambda\xi}\neq 0$，故 $f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$。

最后这一步"因指数函数不为零，故括号内为零"必须写出来，它解释了你为什么能从 $F'(\xi)=0$ 得到结论。

例 2-3（系数带 ξ）

题：设 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使

$$\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0.$$

> **思路**
>
> 结论是 $\xi f'+nf=0$ 的形状（$n=2$），对应 $F=x^2f(x)$。验证：
> $F'=2xf+x^2f'=x\,[2f+xf']$，正是括号里那一坨。$F(0)=0$，$F(1)=1^2f(1)=0$，端点相等成立。

证明 令 $F(x)=x^2f(x)$，则 F 在 $[0,1]$ 上连续、在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=0$，$F(1)=f(1)=0$，故 $F(0)=F(1)$。
由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$，即

$$\xi\left[2f(\xi)+\xi f'(\xi)\right]=0.$$

因 $\xi\in(0,1)$，$\xi\neq 0$，故 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

这里的"因 $\xi\neq 0$ 才能约掉"是个隐蔽给分点。凡结论中出现 ξ 作系数，约分前都要交代 $\xi\neq 0$。

例 2-4（结论含 $1-\xi$，属于"变系数"）

题：设 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使

$$f(\xi)=(1-\xi)f'(\xi).$$

> **思路**
>
> 移项：$(1-\xi)f'(\xi)-f(\xi)=0$。把 ξ 换成 x，两边乘 -1 得 $f'(x)-\dfrac{f(x)}{1-x}=0$，这里 $P(x)=-\dfrac{1}{1-x}$，$\int P\,dx=\ln(1-x)$，故 $F=(1-x)f(x)$。验证端点：
> $F(0)=f(0)=0$，$F(1)=0\cdot f(1)=0$（$f(1)$ 取什么值都行，因为乘了 0）。

证明 令 $F(x)=(1-x)f(x)$，则 F 在 $[0,1]$ 上连续、在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F(0)=f(0)=0,\qquad F(1)=0.$$

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$。而

$$F'(x)=-f(x)+(1-x)f'(x),$$

故 $(1-\xi)f'(\xi)-f(\xi)=0$，即 $f(\xi)=(1-\xi)f'(\xi)$。

这题的妙处：题设只给 $f(0)=0$，却能推出 $F(1)=0$，因为因子 $(1-x)$ 在 $x=1$ 处自动归零。看到结论里有 $(1-\xi)$、ξ、$\xi-a$ 这类因子，往往就是提示你乘上对应的因子。

2.5 题型三：拉格朗日（两点之差与不等式）

识别：结论中出现 $f(b)-f(a)$、$f(x)-f(x_0)$，或者要证含函数值之差的不等式。

例 2-5（证不等式，最标准的一道）

题：证明对任意实数 a, b，有 $|\sin a - \sin b| \le |a - b|$。

> **思路**
>
> 左边是"同名函数值之差"，直接对 $f(x) = \sin x$ 用拉格朗日，再用 $|\cos \xi| \le 1$ 放缩。$a = b$ 时结论显然成立，故只需讨论 $a \ne b$。

证明 若 $a = b$，结论显然。设 $a < b$。令 $f(x) = \sin x$，f 在 $[a, b]$ 上连续、在 (a, b) 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使

$$\sin b - \sin a = \cos \xi \cdot (b - a).$$

取绝对值：$|\sin b - \sin a| = |\cos \xi|\,|b - a| \le |b - a|$。$a > b$ 时交换 a, b 同理。

这类题的最后一步永远是"对 ξ 的取值范围放缩"，而 ξ 在哪不重要，重要的是 $|\cos \xi| \le 1$ 这个界。

2.6 题型四：柯西（两个函数增量之比）

识别：结论中出现**两个函数的增量相除**，或者结论里同时出现 $f'(\xi)$ 与另一个函数的导数（如 ξ、2ξ、$\frac{1}{\xi}$）。

例 2-6

题：设 $0 < a < b$，f 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。证明存在 $\xi \in (a, b)$，使

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

> **思路**
>
> 把结论改写成分式：$\dfrac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \xi f'(\xi)$。左边是两个"增量之比"——分子是 f 的增量，分母是 $\ln x$ 的增量。于是取 $g(x) = \ln x$ 用柯西定理，$g'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ 正好凑出 $\xi f'(\xi)$。

证明 取 $g(x) = \ln x$，则 f, g 在 $[a, b]$ 上连续、在 (a, b) 内可导，且 $g'(x) = \dfrac{1}{x} \ne 0$（$x \in (a, b)$）。由柯西中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi} = \xi f'(\xi).$$

即 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi)\,(\ln b - \ln a) = \xi f'(\xi) \ln \dfrac{b}{a}$。

选 g 的诀窍：**看分母该是什么**。结论里有 $\ln \frac{b}{a}$，就取 $g = \ln x$；有 $b^2 - a^2$，就取 $g = x^2$；有 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$，就取 $g = -\frac{1}{x}$。

2.7 题型五：双中值（存在两个不同的点）

识别与套路

结论里出现 ξ 与 η（并要求 $\xi \neq \eta$），或者在同一个式子里出现两个导数。**套路：把区间一分为二，两段各用一次中值定理。**

分点怎么选：题目给了暗示（如"$f(0)=0, f(1)=1$"常取中点或某个特殊点）；没暗示就取中点 $c=\dfrac{a+b}{2}$。分完后 ξ 落在左段、η 落在右段，自然互异。

例 2-7（先用零点定理定分点，再用两次拉格朗日）

题：设 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$。证明存在互异的 $\eta, \zeta \in (0,1)$，使

$$f'(\eta)f'(\zeta)=1.$$

> **思路**
>
> 要两个导数相乘等于 1，最自然的想法是让它们互为倒数。若能在中间找到一点 ξ 使 $f(\xi)=1-\xi$，那么左段的差商是 $\frac{1-\xi}{\xi}$、右段的差商是 $\frac{\xi}{1-\xi}$，恰好互为倒数——这就是分点。而"存在 ξ 使 $f(\xi)=1-\xi$"正是零点定理。

证明 **第一步**：令 $F(x)=f(x)+x-1$，F 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$。由零点定理，存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$。
第二步：在 $[0,\xi]$ 上对 f 用拉格朗日定理，存在 $\eta \in (0,\xi)$ 使

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}.$$

在 $[\xi,1]$ 上再用拉格朗日定理，存在 $\zeta \in (\xi,1)$ 使

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}.$$

第三步：因 $\eta<\xi<\zeta$，故 $\eta \neq \zeta$，且

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

这道题是两块内容结合的标准范式：**零点定理负责"找到那个点"，中值定理负责"在两侧各取一个导数值"**。第 3 节还有一道同类题。

2.8 题型六：结论含二阶导数（用两次罗尔）

例 2-8

题：设 f 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=f(2)=0$。证明存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$。

> **思路**
>
> 要出现 f''，就得对 f' 用一次罗尔。而要对 f' 用罗尔，先得有两个点使 $f'=0$——这正好由 f 在 $[0,1]$、$[1,2]$ 上各用一次罗尔提供。**三个零点 → 两个 f' 零点 → 一个 f'' 零点**，这是固定节奏。

证明 在 $[0,1]$ 上由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使 $f'(\xi_1)=0$；在 $[1,2]$ 上由罗尔定理，存在 $\xi_2\in(1,2)$ 使 $f'(\xi_2)=0$。
于是 f' 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续、在 (ξ_1,ξ_2) 内可导（因 f 二阶可导），且 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$。对 f' 用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$。

2.9 这一块的六个高频失分点

#	错误	正确做法
1	造出 F 就直接用罗尔，不验证 $F(a)=F(b)$	必须写出 $F(a)$、$F(b)$ 的具体值并说明相等
2	拉格朗日只写"由定理得"，不写"$[a,b]$ 连续、(a,b) 可导"	两条条件是评分点，逐条写
3	用柯西不验证 $g'(x)\neq 0$	补一句"$g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$"
4	双中值只用一个字母，或没说明两点不同	分属两个不相交区间 ⇒ 必然互异，要写出来
5	结论含 f'' 却只用了一次罗尔	三个等值点才能推 f''，两个只能推 f'
6	从 $F'(\xi)=0$ 直接"约掉"因子，不说为什么能约	交代"因 $e^{-\lambda\xi}\neq 0$／$\xi\neq 0$"

PART 3

综合题：两块内容连起来考

期末最后一道证明题常见这种结构：**先用零点定理定一个点，再用中值定理在该点两侧做文章**；或者**先用最值定理 + 费马找到一个导数为零的点，再叠一次拉格朗日**。下面两道是模板。

例 3-1（最值 + 费马 + 两次拉格朗日）

题：设 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x_0)>0$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)<0$。

> **思路**
>
> 结论要 $f''<0$，就得对 f' 用拉格朗日，也就需要两个点上的 f' 一正一负。f 中间高、两端为 0，说明它在左侧上升、右侧下降——这正好给出 f' 一正一负。而在最高点处 $f'=0$（费马），这个点可以作为"分界"。严格写时用最值定理取到最大值点。

证明 由最值定理，f 在 $[0,1]$ 上取到最大值 M。因 $f(x_0)>0$，故 $M>0$，且最大值点 $\xi_0\in(0,1)$（端点处函数值为 0，取不到 M）。由费马定理，

$$f'(\xi_0)=0.$$

在 $[0,\xi_0]$ 上对 f 用拉格朗日定理，存在 $\eta\in(0,\xi_0)$，使

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi_0)-f(0)}{\xi_0-0}=\frac{M}{\xi_0}>0.$$

在 $[\xi_0,1]$ 上再用拉格朗日定理，存在 $\zeta\in(\xi_0,1)$，使

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi_0)}{1-\xi_0}=\frac{0-M}{1-\xi_0}=-\frac{M}{1-\xi_0}<0.$$

因 f 二阶可导，f' 在 $[\eta,\zeta]$ 上连续、在 (η,ζ) 内可导，由拉格朗日定理，存在 $\xi\in(\eta,\zeta)\subset(0,1)$，使

$$f''(\xi)=\frac{f'(\zeta)-f'(\eta)}{\zeta-\eta}<0.$$

这题用了四个工具：最值定理、费马定理、两次拉格朗日、再一次拉格朗日。是"综合题"的标准配置，值得完整背下来。

例 3-2（导数符号 → 零点存在 → 两次罗尔）

题：设 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且 $f'(0)>0$，$f'(1)>0$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=0$。

> **思路**
>
> 要 $f''=0$，得先有三个 f 的零点（两次罗尔）。已知两个端点，缺一个内部的。而 $f'(0)>0$ 说明 f 在 0 右侧为正，$f'(1)>0$ 说明 f 在 1 左侧为负——一正一负之间必有零点，这正是零点定理。所以关键是用**导数的定义**把"f 在某点为正／为负"翻译出来。

证明 由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}>0$，由极限的保号性，存在 $x_1\in(0,1)$ 使 $f(x_1)>0$。

同理，由 $f'(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}>0$ 及 $x-1<0$，存在 $x_2\in(0,1)$ 使 $f(x_2)<0$。

因 f 在 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上连续，且两端函数值异号，由零点定理，存在 x_3 介于 x_1,x_2 之间，使 $f(x_3)=0$。于是 $0,x_3,1$ 是三个互异的零点。

在 $[0,x_3]$ 与 $[x_3,1]$ 上分别用罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,x_3)$、$\xi_2\in(x_3,1)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$。再对 f' 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使 $f''(\xi)=0$。

PART 4

答题模板：照着写就不会丢过程分

证明题的过程分往往占一半。下面是一个"满分骨架"，任何一道中值定理题都可以往里填。

步骤	写什么	对应得分点
①	"令 $F(x)=\cdots$"（或"设 $f(x)=\cdots$"）	构造出正确的辅助函数
②	"F 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导"	定理的第一个条件
③	"$F(a)=\cdots$，$F(b)=\cdots$，故 $F(a)=F(b)$"	第二个条件（最容易漏）
④	"由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$"	结论引用
⑤	"即 $\cdots$，因 $\cdots\neq0$，故 $\cdots$"（还原成要证的形式）	回到原命题，收尾

> **三条通用提醒**
>
> ① **每用一个定理，先交代它的条件**，再引用结论——顺序不能反。
> ② **不要写"显然"**。哪怕 $F(0)=0$ 一眼可见，也要写出"$F(0)=f(0)=0$"。
> ③ **最后一句必须是题目要证的结论原话**（如"即存在 ξ 使 $f'(\xi)=f(\xi)$"），不要停在中间步骤。

PART 5

专项练习（10 题）

建议限时 50 分钟。做完对照详解，错的那题回前面的对应题型重看一遍。

1 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根。

2 设 $f \in C[0,1]$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$。证明存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi}$。

3 设 $f \in C[0,1]$。证明存在 $\xi \in [0,1]$，使 $f(\xi) = \dfrac{f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)}{3}$。

4 设 $f : [0,1] \to [0,1]$ 连续。证明存在 $\xi \in [0,1]$，使 $f(\xi) = 1 - \xi$。

5 证明方程 $xe^x = 1$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个根。

6 设 f 在 $[0,1]$ 上连续、$(0,1)$ 内可导，$f(0) = f(1) = 0$。证明存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2f(\xi)$。

7 设 $0 < a < b$，f 在 $[a,b]$ 上连续、(a,b) 内可导。证明存在 $\xi \in (a,b)$，使
$f(b) - f(a) = \dfrac{b^2 - a^2}{2\xi} f'(\xi)$。

8 设 f 在 $[a,b]$ 上连续、(a,b) 内可导，$f(a) = f(b) = 0$。证明存在 $\xi \in (a,b)$，使 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$。

9 证明对任意实数 a, b，有 $|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$。

10 设 f 在 $[0,1]$ 上连续、$(0,1)$ 内可导，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$。证明存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi$。

详解

1. 令 $F(x)=x^3-4x^2+1$，F 在 $[0,1]$ 连续。$F(0)=1>0$，$F(1)=1-4+1=-2<0$。由零点定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$。

2. 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{1+x}$，在 $[0,1]$ 连续。$F(0)=0-1=-1<0$，$F(1)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$。由零点定理得证。

3. 由最值定理，$m\le f(x)\le M$。三个函数值都夹在 m,M 之间，故其算术平均 c 也满足 $m\le c\le M$。由介值定理，存在 $\xi\in[0,1]$ 使 $f(\xi)=c$。

4. 令 $F(x)=f(x)+x-1$，连续。由 $0\le f(x)\le 1$ 得 $F(0)=f(0)-1\le 0$，$F(1)=f(1)\ge 0$。若某端为 0 则取该端点；否则由零点定理得证。

5. 令 $F(x)=xe^x-1$，$F(0)=-1<0$，$F(1)=e-1>0$，由零点定理存在根。又 $F'(x)=e^x(1+x)>0$（$x>0$），F 严格递增，故根唯一。

6. 令 $F(x)=e^{-2x}f(x)$。F 在 $[0,1]$ 连续、$(0,1)$ 可导，$F(0)=F(1)=0$。由罗尔定理，存在 ξ 使 $F'(\xi)=e^{-2\xi}[f'(\xi)-2f(\xi)]=0$，因 $e^{-2\xi}\neq 0$，故 $f'(\xi)=2f(\xi)$。

7. 取 $g(x)=x^2$，在 $[a,b]$ 上用柯西定理（$g'=2x\neq 0$）：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$，整理即得。

8. 令 $F(x)=xf(x)$。$F(a)=af(a)=0$，$F(b)=bf(b)=0$，由罗尔定理存在 ξ 使 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

9. $a=b$ 时显然。设 $a<b$，对 $f(x)=\arctan x$ 在 $[a,b]$ 上用拉格朗日：$\arctan b-\arctan a=\dfrac{1}{1+\xi^2}(b-a)$，故 $|\arctan b-\arctan a|\le|b-a|$。

10. 令 $F(x)=f(x)-x^2$。F 在 $[0,1]$ 连续、$(0,1)$ 可导，$F(0)=0$，$F(1)=1-1=0$。由罗尔定理，存在 ξ 使 $F'(\xi)=f'(\xi)-2\xi=0$。

本专题对应齐民友主编《高等数学（第二版）上册》第 1 章第 8 节（闭区间上连续函数的性质）与第 3 章第 1 节（微分中值定理）。例题与练习为独立编写，答案已逐题核对。

用法建议：先读 Part 2 的 2.2（辅助函数构造），这是全部中值定理题的共同入口；再用 Part 4 的骨架默写一遍例 2-2；最后限时做 Part 5。