期 中 复 习 · 应 试 整 合 版

# 高等数学 A1 期中复习参考（第 1–4 章）

极限与连续 · 导数与微分 · 中值定理与导数应用 · 不定积分

依据：武汉大学 2020–2025 年 12 套期中真题　教材：齐民友《高等数学》第二版上册（高教社）

结构：考情 → 速查 → 模板 → 易错 → 习题 → 整卷

SECTION 0

## 考情：这 12 套卷子到底考什么

下面所有统计来自 **2020–2025 年武汉大学高数 A1 期中 12 套卷**（20–21、22–23 正式卷 + 试题 1/2/3、22–23 测验、23–24 正卷 + 第二/三/四套、24–25 第二/三套）。统计口径是"该考点在多少套卷中出现过"，不是分值累加——因为各卷分值结构不同。

### 0.1 卷面结构：两种模板，一种在变

| 年份 / 卷 | 题量 | 结构 | 总分 | 含不定积分 |
|---|---|---|---|---|
| 20–21 期中 | 12 | 4 道极限（20 分）+ 8 道综合（每题 6–8 分） | 100 | 否 |
| 22–23 正式卷 | 12 | 同上，题序与 20–21 高度重合 | 100 | 否 |
| 22–23 试题 1/2/3 | 10/9/10 | 五～十个大题，每题 6–24 分，难度高于正式卷 | 100 | 否 |
| 23–24 正卷 | 16 | 15 题 + 8 分附加题，单题 6–9 分 | 100+8 | 否 |
| 23–24 第二套 | 13 | 单题 5–10 分，证明题偏多 | 100 | 否 |
| 23–24 第三套 | 12 | 与 20–21 同构（1 道极限大题 18 分 + 11 题） | 100 | 否 |
| 23–24 第四套 | 9 | 极限 4 小题（24 分）+ 8 道大题 | 100 | 否 |
| 24–25 第二套 | 8 | 计算 4×8 + 6 道大题（10 分） | 100 | **是（8 分）** |
| 24–25 第三套 | 10 | 10 题 × 10 分，题题等值 | 100 | **是（20 分）** |

**趋势判断**

① 卷面从"12 题混合"走向"10 题等值"，单题权重上升，**一道题做错就是 10 分**，容错率比过去低。② 24–25 起不定积分正式进入期中，占 8–20 分，全部是**计算题**，没有证明。③ 证明题稳定在 2–3 道（20–30 分），考点固定在"闭区间连续性质 + 微分中值定理"。

## 0.2 考点频次：出现过的才算重点

| 章 | 考点 | 出现套数 | 优先级 | 典型题面 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 等价无穷小 / 泰勒求 $0/0$ 型 | 12 / 12 | ★★★ | $\lim \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^2[\ln(1+x)-x]}$ |
| | $1^\infty$ 型（幂指函数） | 8 / 12 | ★★★ | $\lim(1+\sin x-\sin(\sin x))^{1/x^3}$ |
| | 数列极限（夹逼 / 单调有界） | 6 / 12 | ★★★ | $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ |
| | 间断点求法与分类 | 5 / 12 | ★★★ | $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ |
| | 用定义证极限 / 一致连续 | 2 / 12 | ★★ | $\lim f(x)=A>0\Rightarrow\lim\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$ |
| | $\infty-\infty$、$0\cdot\infty$ 型 | 5 / 12 | ★★ | $\lim\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ |
| | 无穷小阶数反求参数 | 4 / 12 | ★★ | $e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 与 $x^3$ 同阶，求 $a,b$ |
| 2 | 分段点连续 / 可导求参数 | 7 / 12 | ★★★ | $\varphi(x)/x$ 与 $ax+b$ 拼接，处处可导 |
| | 参数方程求导（含二阶） | 7 / 12 | ★★★ | $x=t^3+9t,\ y=t^2-2t$ 求下凸区间 |
| | 隐函数求导（含二阶） | 6 / 12 | ★★★ | $xy+e^y=e$，求 $y''(0)$ |
| | 高阶导数（莱布尼茨 / 公式） | 6 / 12 | ★★★ | $y=(3x^2-2)^2\sin 2x$，求 $y^{(100)}(0)$ |
| | 抽象函数方程求导 | 3 / 12 | ★★ | $f(xy)=f(x)+f(y)$，$f'(1)=1$，求 $f'(x)$ |
| | 幂指函数 / 对数求导 | 3 / 12 | ★★ | $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\ln x}$ |
| | 微分 $dy$ | 4 / 12 | ★★ | $y=\ln\left[\varphi^2(\sin x)\right]$，求 $dy$ |
| | 渐近线（铅直 / 水平 / 斜） | 5 / 12 | ★★★ | $y=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ 的全部渐近线 |
| 3 | 辅助函数 + 罗尔（含 $\xi$ 的等式） | 9 / 12 | ★★★ | $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$ |
| | 单调性 / 极值 | 8 / 12 | ★★★ | 列表求增减区间、极值点 |
| | 凹凸区间 / 拐点 | 7 / 12 | ★★★ | $f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}+3$ |
| | 不等式证明 | 7 / 12 | ★★★ | $ab-e^{a-1}\le b\ln b$ |
| | 零点定理 / 根的个数 | 6 / 12 | ★★★ | $\lvert x\rvert^{1/4}+\lvert x\rvert^{1/2}-\cos x=0$ 恰有 2 根 |
| | 泰勒公式证明 / 求极限 | 3 / 12 | ★★ | $f''(x)>0$ 且 $\lim\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow f(x)\ge x$ |
| | 曲率与曲率半径 | 2 / 12 | ★★ | 原点相切，求 $R$，证 $\left\lvert\lim\frac{x^2}{2f(x)}\right\rvert=R$ |
| 4 | 第一类换元（凑微分） | 2 / 12 | ★★★ | $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$ |
| | 分部积分 / 原函数概念 | 2 / 12 | ★★★ | 已知 $f$ 的原函数为 $\frac{\cos x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$ |
| | 三角有理式 / 配方换元 | 2 / 12 | ★★ | $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$，$\int\frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$ |

### 0.3 三条命题规律（比刷题更重要）

**规律一：真题跨年重复，重复率高得离谱**

同一道题在不同年份反复出现，只改数字。已确认重复的：① $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$（23–24 第三套、第四套）；② $y=(3x^2-2)^2\sin 2x$ 求 $y^{(100)}(0)$（23–24 第三套、23–24 测绘卷）；③ $xy+e^y=e$ 求 $y''(0)$（20–21、22–23、23–24 三套）；④ $f(x)=\frac{g(x)-\cos x}{x}$ 求 $a$ 与 $f'(x)$（20–21、22–23、23–24 三套）；⑤ $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$（20–21、22–23、23–24 三套）；⑥ 抛物线 $y=4-x^2$ 第一象限切线围成三角形面积最小（22–23 试题 1、试题 2）；⑦ 曲率半径 $R$ 与 $\left|\lim\frac{x^2}{2f(x)}\right|=R$（22–23 试题 1、试题 2）。

**结论**：把本资料第 6 节的三套卷当模拟，把标注"真题"的例题全部手推一遍，覆盖面就够 80%。

**规律二：证明题只有四个母题**

所有证明题都能归到：(a) 零点定理（存在 $\xi$ 使 $f(\xi)=0$ 或 $f(\xi)=c$）；(b) 罗尔 + 辅助函数（存在 $\xi$ 使含 $f'(\xi)$ 的等式成立）；(c) 拉格朗日 / 泰勒（不等式、估值）；(d) 单调性（不等式、根的惟一性）。第 3 节 2.8–2.10 把这四类拆成了可套用的步骤。

**规律三：计算题的"坑"集中在四处**

① 分段点用求导公式而不是定义；② 加减法中乱用等价替换；③ 洛必达不验型就硬求导；④ 参数方程二阶导忘记除以 $x'(t)$。这四点在第 4 节单列，每条都对应真题里的实际扣分。

### 0.4 复习顺序：按"分/小时"排序

| 优先级 | 内容 | 理由 | 建议用时 |
|---|---|---|---|
| P0 | 极限四类（等价、泰勒、$1^\infty$、夹逼）+ 导数五情形 + 不定积分五类 | 纯计算，套路固定，练一道会一类，总分 50–60 | 4 h |
| P1 | 中值定理辅助函数表 + 零点定理 + 不等式四法 | 证明题 20–30 分，模板化程度高 | 3 h |
| P2 | 单调/极值/凹凸/拐点/渐近线（列表法） | 步骤固定，但计算量大，容易算错 | 2 h |
| P3 | 曲率、一致连续、泰勒证明、双中值 | 低频或难度大，性价比低 | 1 h |

SECTION 1

## 速查：考前必须能默写的东西

这一节不解释，只给结论。目标是**能在 30 分钟内把四张表默写一遍**，做不到就说明基础不牢，后面的模板也用不出来。

### 1.1 极限：等价无穷小与泰勒

（a）等价无穷小（$x\to 0$，只能用于乘除，不能用于加减）

| 基本型 | 基本型 | 三阶修正（差函数） | 三阶修正（差函数） |
|---|---|---|---|
| $\sin x\sim x$ | $\tan x\sim x$ | $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$ | $\tan x-x\sim\frac{x^3}{3}$ |
| $\arcsin x\sim x$ | $\arctan x\sim x$ | $x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}$ | $\arcsin x-x\sim\frac{x^3}{6}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ | $\ln(1+x) \sim x$ | $\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$ | $\ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2}$ |
| $e^x - 1 \sim x$ | $a^x - 1 \sim x \ln a$ | $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ | $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$ |

用法要点：① 乘除可直接替换；② 加减中若两项主部相消，必须换到下一阶（表右两列就是为此准备的）；③ 复合函数里先换内层，如 $\ln(1+\sin^2 x) \sim \sin^2 x \sim x^2$。

**(b) 麦克劳林展开**（带佩亚诺余项，$x \to 0$）

| 函数 | 展开式 | 常用阶 |
|---|---|---|
| $e^x$ | $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ | 3 |
| $\sin x$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ | 3/5 |
| $\cos x$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ | 4 |
| $\ln(1+x)$ | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ | 3 |
| $(1+x)^\alpha$ | $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ | 2 |
| $\frac{1}{1-x}$ | $1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ | 3 |
| $\tan x$ | $x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ | 3 |
| $\arctan x$ | $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ | 3 |

**(c) 常用极限结论**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\ (a>0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

**(d) 夹逼常用不等式**：$n \cdot 1 \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le n$ 太粗，实战用 $\frac{1}{n} \le$ 每项 $\le 1$ 得 $1 \le (\cdot)^{1/n} \le n^{1/n}$；以及 $|x| \le$ 有界量 $\times$ 无穷小。

## 1.2 导数：公式与高阶导

| 基本初等函数 | 基本初等函数 | 复合 / 特殊 |
|---|---|---|
| $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ | $(\sin x)' = \cos x$ | $(\tan x)' = \sec^2 x$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a$ | $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\cot x)' = -\csc^2 x$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\sec x)' = \sec x \tan x$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

**高阶导公式**（$n$ 阶，$n \ge 1$）

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, \qquad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, \qquad (a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$$

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

**莱布尼茨公式**：$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$。当其中一个因子是**低次多项式**（$x^2$、$3x^2-2$、$x^2+x$）时，只有前三项非零，这是所有"求 $y^{(100)}(0)$"题的唯一解法。

### 1.3 中值定理：一条链，四个定理

| 定理 | 条件 | 结论 | 用途 |
|---|---|---|---|
| **费马** | $x_0$ 是极值点，$f$ 在 $x_0$ 可导 | $f'(x_0)=0$ | 极值必要条件；推导罗尔 |
| **罗尔** | $[a,b]$ 连续，$(a,b)$ 可导，$f(a)=f(b)$ | $\exists \xi \in (a,b)$，$f'(\xi)=0$ | 一切"存在 $\xi$ 使等式成立"的基底 |
| **拉格朗日** | $[a,b]$ 连续，$(a,b)$ 可导 | $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ | 不等式、估值、两点差 |
| **柯西** | 同上，且 $g'(x)\neq 0$ | $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ | 两个增量之比；双中值 |

**辅助函数构造表**（看到结论左边，造右边）

| 要证的结论 | 辅助函数 $F(x)$ | 识别口诀 |
|---|---|---|
| $f'(\xi)=0$ | $f(x)$ | 已给两点相等 |
| $f'(\xi)+kf(\xi)=0$ | $e^{kx}f(x)$ | 看到 $f'+kf$，乘 $e^{kx}$ |
| $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$ | $e^{g(x)}f(x)$ | 系数是函数，乘 $e^{g}$ |
| $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$ | $xf(x)$ | 看到 $\xi f'+f$，乘 $x$ |
| $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$ | $\frac{f(x)}{x^n}$ | 除以 $x^n$ |
| $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$ | $x^n f(x)$ | 乘 $x^n$ |
| $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$ | $(1-x)^2 f(x)$ | 把 $1-\xi$ 配成平方 |
| $f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0$ | $e^{-\lambda x}f(x)$ | 负号进指数 |
| $f'(\xi)\cos\xi - f(\xi)\sin\xi=0$ | $f(x)\cos x$ | 商的导数结构 |
| $f'(\xi)\sin\xi + f(\xi)\cos\xi=0$ | $f(x)\sin x$ | 积的导数结构 |
| $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$ | $f(x)e^{g(x)}$ | 23–24 附加题原题 |
| $\xi f''(\xi)+f'(\xi)=0$ | $xf'(x)$（两次罗尔） | 对 $f'$ 用罗尔 |

### 1.4 几何应用：四个公式组

（a）渐近线

- 铅直：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty \Rightarrow x=a$。找**无定义点**与**定义域端点**。
- 水平：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b \Rightarrow y=b$。

- **斜**：$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，若 $a,b$ 都存在且 $a\neq 0\Rightarrow y=ax+b$。$x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ **要分开算**，可能得到两条不同斜渐近线。

**（b）单调、极值、凹凸、拐点**

| 判定对象 | 一阶导 | 二阶导 | 结论 |
|---|---|---|---|
| 单调增 | $f'(x)>0$ | — | 区间内严格增 |
| 极值①（$f'$ 变号） | $f'$ 在 $x_0$ 两侧变号 | — | 左正右负为极大，反之极小 |
| 极值②（$f''$ 定号） | $f'(x_0)=0$ | $f''(x_0)\neq 0$ | $f''<0$ 极大，$f''>0$ 极小 |
| 凸（凹向上） | — | $f''(x)>0$ | 切线在曲线下方 |
| 凹（凸向上） | — | $f''(x)<0$ | 切线在曲线上方 |
| 拐点 | — | $f''$ 在 $x_0$ 两侧变号 | $(x_0,f(x_0))$ 是曲线上的点 |

注意术语：本教材"凸"指 $f''>0$（凹向上），与部分教材相反。答题时**直接写 $f''>0$ 的区间**，不要只写"凸区间"，避免阅卷歧义。

**（c）曲率**

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x,\qquad K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}},\qquad R=\frac{1}{K}$$

参数式：$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,\qquad K=\dfrac{|x'y''-x''y'|}{([x']^2+[y']^2)^{3/2}}$

**（d）极值应用题三步**：设变量（一个自变量）→ 写目标函数 → 求导找驻点 → **用实际意义或第二充分条件判极大极小** → 回答所问。

## 1.5 不定积分：基本表与四套换元

**（a）基本积分表（$C$ 省略，答题必须写）**

| 积分 | 积分 | 积分 |
|---|---|---|
| $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert$ | $\int e^x dx=e^x$ |
| $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}$ | $\int\sin x\,dx=-\cos x$ | $\int\cos x\,dx=\sin x$ |
| $\int\sec^2 x\,dx=\tan x$ | $\int\csc^2 x\,dx=-\cot x$ | $\int\sec x\tan x\,dx=\sec x$ |
| $\int\csc x\cot x\,dx=-\csc x$ | $\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x$ | $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$ |
| $\int\tan x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert$ | $\int\cot x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert$ | $\int\sec x\,dx=\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert$ |
| $\int\csc x\,dx=\ln\lvert\csc x-\cot x\rvert$ | $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ | $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}$ |
| $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$ | $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$ | $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert$ |

**（b）四套换元**

| 类型 | 识别信号 | 做法 |
|---|---|---|
| 第一类（凑微分） | 被积式含 $g'(x)dx$ 的因子 | $\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$ |
| 第二类（变量代换） | 含 $\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{a^2+x^2}$、$\sqrt{x^2-a^2}$ | $x=a\sin t$、$x=a\tan t$、$x=a\sec t$ |
| 根式整体代换 | 含 $\sqrt[n]{ax+b}$ | 令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$，反解 $x$ |
| 倒代换 | 分母次数比分子高很多，如 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ | 令 $x=\frac{1}{t}$ |

（c）**分部积分**：$\int u\,dv = uv - \int v\,du$。选 $u$ 的顺序（口诀"**反、对、幂、三、指**"，排在前面的取作 $u$）：反三角 → 对数 → 幂函数 → 三角 → 指数。

| 题型 | 处理 |
|---|---|
| $\int x^n e^{ax}dx$、$\int x^n \sin ax\,dx$ | 取 $u=x^n$，做 $n$ 次分部，每次降一次幂 |
| $\int x^n \ln x\,dx$、$\int x^n \arctan x\,dx$ | 取 $u=\ln x$ 或 $\arctan x$，$dv=x^n dx$ |
| $\int e^{ax}\sin bx\,dx$、$\int e^{ax}\cos bx\,dx$ | 两次分部后**移项解方程**（循环型） |
| $\int \ln x\,dx$、$\int \arctan x\,dx$ | $u=\ln x$，$dv=dx$ |
| $\int \sec^3 x\,dx$ | 分部后出现原积分，移项 |

（d）**有理函数与三角有理式**

- **有理函数**：先看是否**假分式**（分子次数 $\geq$ 分母），是则做多项式除法；再对分母因式分解，按因子写部分分式：$\frac{A}{x-a}$、$\frac{A}{(x-a)^k}$、$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$、$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$。二次不可约因子配方后用 $\arctan$ 或 $\ln$。
- **三角有理式** $\int R(\sin x,\cos x)dx$：① $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\cos x$；② $R(\sin x,-\cos x)=-R$，令 $t=\sin x$；③ $R(-\sin x,-\cos x)=R$，令 $t=\tan x$；④ 都不满足，万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$（$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$）。
- **简单无理式**：$\sqrt{a^2-x^2}$ 用 $x=a\sin t$；$\sqrt{x^2+a^2}$ 用 $x=a\tan t$；$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 整体令 $t=\sqrt{\cdot}$。

### 1.6 不等式：证明题的"逆向武器"

| 不等式 | 条件 | 用途 |
|---|---|---|
| $\sin x < x < \tan x$ | $0<x<\frac{\pi}{2}$ | 三角放缩 |
| $e^x \geq 1+x$ | $\forall x$ | 指数放缩，等号仅 $x=0$ |
| $\ln(1+x)\leq x$ | $x>-1$ | 对数放缩 |
| $\frac{x}{1+x}\leq \ln(1+x)\leq x$ | $x>-1$ | 双侧夹逼 |
| $\ln x \leq x-1$ | $x>0$ | 取对数后放缩 |
| $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$ | $0<x<\frac{\pi}{2}$ | 线性下界 |
| $a^2+b^2\geq 2ab$ | $\forall a,b$ | 配方 |
| $\frac{a\ln a+b\ln b}{a+b}\geq \ln\frac{a+b}{2}$ | $a,b>0$ | 23–24 第三套原题（凸性） |

**默写清单（考前 10 分钟）**

等价无穷小 8+4 条、泰勒 5 个（$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$）、高阶导 4 条、中值定理 4 条 + 辅助函数 8 条、渐近线 3 条、曲率 2 条、基本积分表 12 条、分部选 $u$ 口诀。

SECTION 2

## 模板：每一类题怎么下手

每一类给三样东西：**识别信号**（看到什么用什么）、**固定步骤**（照做就行）、**真题例**（标注来源，可直接对照原卷）。例题只写关键一步，省略纯计算。

### 2.1 求极限：先判型，再选工具

不要一上来就洛必达。按下面顺序走，五秒内能定方案。

| 代入后形态 | 首选 | 次选 / 说明 |
|---|---|---|
| $0/0$ | 等价无穷小 → 泰勒 | 洛必达放最后：求导后往往更复杂 |
| $\infty/\infty$ | 抓大头（同除最高次） | 含 $e^x, \ln x$ 时用洛必达 |
| $\infty - \infty$ | 通分 / 有理化 / 提公因子 | 根式差优先有理化 |
| $0 \cdot \infty$ | 把其中一个写成倒数，变分式 | 选"求导后变简单"的那个下放 |
| $1^\infty$ | $\ln$ 后变 $0 \cdot \infty$，或直接套 $e^{\lim v(u-1)}$ | 真题最高频 |
| $0^0,\ \infty^0$ | 取对数 | 同上 |
| 数列（$n \to \infty$） | 夹逼 / 单调有界 | 不能求导，不能洛必达 |
| 含 $\sin$ 的整数倍 | 先化简周期性再求 | 如 $\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ |

**例 2-1（24–25 第三套，10 分）$\infty - \infty$ 型：先通分再泰勒**

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$。

解 通分得 $\dfrac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{(e^x-1)\ln(1+x)}$。分母 $\sim x^2$；分子用三阶展开：

$e^x - 1 - \ln(1+x) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$。故原式 $= \lim \dfrac{x^2}{x^2} = 1$。

答案 $1$。

**例 2-2（23–24 第四套）分母需展开到四阶**

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^2\left[\ln(1+x) - x\right]}$。

解 分母：$\ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2}$，故整体 $\sim -\frac{x^4}{2}$，**必须展到四阶**。分子：$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$，$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$，相减得 $-\frac{x^4}{12}$。原式 $= \dfrac{-1/12}{-1/2} = \dfrac{1}{6}$。答案 $\frac{1}{6}$。

**例 2-3（23–24 第二套）$1^\infty$ 型：先算"底减 1"，再乘指数**

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x-\sin(\sin x)\right)^{1/x^3}$。

解 底减 1 为 $\sin x-\sin(\sin x)$。令 $t=\sin x$，则 $t-\sin t\sim\frac{t^3}{6}$，故 $\sin x-\sin(\sin x)\sim\frac{\sin^3 x}{6}\sim\frac{x^3}{6}$。于是原式 $=e^{\lim\frac{1}{x^3}\cdot\frac{x^3}{6}}=e^{1/6}$。答案 $e^{1/6}$。

**例 2-4（23–24 第三套）$0\cdot\infty$ 型：换元后整体展开**

求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]$。

解 令 $t=\frac{1}{x}\to\infty$ 不方便，直接展开：
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\exp\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\exp\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\cdots\right]=e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}-\cdots\right)$。乘 $x$ 后取极限得 $-\frac{e}{2}$。答案 $-\frac{e}{2}$。

**例 2-5（20–21 期中）根式差先"有理化一半"**

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^2\left(\sqrt{1+\tan^2 x}-1\right)}$。

解 $\sqrt{1+\tan^2 x}=\sec x$（$x$ 靠近 0 时 $\sec x>0$），$\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$，分母 $\sim\frac{x^4}{2}$。分子：
$e^x+e^{-x}=2+x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)$，故分子 $\sim\frac{x^4}{12}$。原式 $=\dfrac{1/12}{1/2}=\dfrac{1}{6}$。答案 $\frac{1}{6}$。

**例 2-6（23–24 第三套 / 第四套）夹逼：$n$ 项和开 $n$ 次方**

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$。

解 $1\le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\le n$，故 $1\le$ 原式 $\le n^{1/n}\to 1$。答案 1。

这类题的固定动作：**下界取最大项，上界取"项数 × 最大项"**。若各项都趋于 0，用 $n\cdot\max\to 0$。

**例 2-7（23–24 正卷）拉格朗日 + 夹逼：两个同型函数值相减**

求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$，$a>0$。

解 令 $f(x)=\arctan\frac{a}{x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{a}{x^2+a^2}$。在 $[n,n+1]$ 上用拉格朗日：
$f(n)-f(n+1)=-f'(\xi)=\dfrac{a}{\xi^2+a^2}$，$\xi\in(n,n+1)$。故原式 $=n^2\cdot\dfrac{a}{\xi^2+a^2}$，由 $\dfrac{n^2}{(n+1)^2+a^2}\le\dfrac{n^2}{\xi^2+a^2}\le\dfrac{n^2}{n^2+a^2}$ 夹逼得极限 $a$。答案 $a$。

**例 2-8（22–23 试题 3）先化周期性再求**

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$。

解 $\sqrt{n^2+n}=n\sqrt{1+\frac{1}{n}}=n+\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$。故
$\sin^2\left(\pi n+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8n}+\cdots\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{8n}+\cdots\right)\to 1$。答案 1。

**例 2-9（三卷重复）$1^\infty$ 型 + 三角化简**

求 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，并记此极限为 $f(x)$。

解 底趋于 $1$，指数趋于 $\infty$。取对数：$\dfrac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(1+\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)\sim\dfrac{x}{\sin t-\sin x}\cdot\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}=\dfrac{x}{\sin x}$。故 $f(x)=e^{x/\sin x}$。**答案 $f(x)=e^{x/\sin x}$。**

后续常接一问"求 $f$ 的间断点"：$x=0$ 为可去间断点（$\lim f=e$），$x=k\pi\ (k\neq 0)$ 为第二类（无穷）。

**四个高频错误（对应真题扣分点）**

① 加减中替换：$\tan x-\sin x\sim x-x=0$ 是错的，必须用 $\frac{x^3}{2}$。② 洛必达前不验型：$\frac{0}{0}$ 才能用，$\frac{1}{0}$ 型硬求导必错。③ 展开阶数不足：分母是 $x^4$，分子就必须展到 $x^4$，差一项就是错。④ 数列极限用洛必达：$n$ 是离散变量，只能用夹逼或单调有界。

## 2.2 无穷小阶数与反求参数

**固定动作**：把两个函数都展成幂级数 → 相减 → 让最低次项的次数等于题目给的同阶/等价条件 → 令低次项系数为 $0$，解方程。

**例 2-10（23–24 正卷）同阶于 $x^3$，反求 $a,b$**

已知 $x\to 0$ 时 $e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 与 $x^3$ 同阶，求 $a,b$。

解 $\dfrac{1+ax}{1+bx}=(1+ax)(1-bx+b^2x^2-b^3x^3+\cdots)$ 展开到三阶，与 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots$ 相减，得

$$e^x-\frac{1+ax}{1+bx}=(1-a+b)x+\left(\frac{1}{2}-b^2+ab\right)x^2+\left(\frac{1}{6}-ab^2+b^3\right)x^3+o(x^3).$$

令前两个系数为 $0$：$a-b=1$，$\frac{1}{2}-b^2+ab=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$。**答案 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$。**

**例 2-11（23–24 第二套）等价无穷小反求 $n$**

$x\to 0$ 时 $e^{-x^2}-\sqrt{\cos 2x}$ 与 $ax^n$ 为等价无穷小，求 $n$。

解 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$；$\cos 2x=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$，故 $\sqrt{\cos 2x}=1-x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$。相减得 $\frac{2}{3}x^4$，故 $n=4$。**答案 $n=4$（$a=\frac{2}{3}$）。**

**例 2-12（22–23 试题 2）极限存在反求 $a,b$**

确定 $a,b$，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ 存在，并求此极限。

解 先令常数项为 $0$：$1+a+b=0$。$\cos 2x=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\cdots$，$\cos 4x=1-8x^2+\frac{32}{3}x^4+\cdots$。分子 $=(1+a+b)+(-2a-8b)x^2+\left(\frac{2a}{3}+\frac{32b}{3}\right)x^4+\cdots$。再令 $x^2$ 系数为 $0$：$a+4b=0$。解得 $b=\frac{1}{3}$，$a=-\frac{4}{3}$，极限 $=\frac{2a}{3}+\frac{32b}{3}=\frac{8}{3}$。**答案 $a=-\frac{4}{3},b=\frac{1}{3}$，极限 $\frac{8}{3}$。**

## 2.3 连续与可导：分段点必须用定义

**三段式答题**（少写一段就扣分）：

1. **连续性**：算 $f(0)$、$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$、$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，三者相等 ⇒ 连续，得一个方程。
2. **可导性**：分别用**定义**算 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 与 $f'_-(0)$，相等 ⇒ 可导，再得一个方程。
3. **导函数连续性**（题目问"并讨论 $f'$ 的连续性"时才写）：写出 $x\neq0$ 时的 $f'(x)$，再验证 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$。

### 例 2-13（23–24 正卷，7 分）$\varphi(x)/x$ 型

设 $\varphi$ 二阶连续可导，$\varphi(0)=0$，$f(x)=\begin{cases}\varphi(x)/x, & x>0\\ ax+b, & x\le0\end{cases}$，问 $a,b$ 为何值时 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，并讨论 $f'$ 的连续性。

解 **连续**：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)}{x}=\varphi'(0)$（洛必达），$\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b)=b$，故 $b=\varphi'(0)$。**可导**：$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi'(0)x}{x^2}=\frac{\varphi''(0)}{2}$，$f'_-(0)=a$，故 $a=\frac{\varphi''(0)}{2}$。**导函数连续**：$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\varphi''(x)}{2}=\frac{\varphi''(0)}{2}=f'(0)$，故 $f'$ 连续。**答案 $a=\frac{\varphi''(0)}{2}$，$b=\varphi'(0)$。**

### 例 2-14（20–21、22–23、23–24 三卷重复）$\frac{g(x)-\cos x}{x}$ 型

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$，$g$ 有二阶连续导数，$g(0)=1$。求 $a$ 使 $f$ 在 $x=0$ 连续，并求 $f'(x)$。

解 连续：$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g'(x)+\sin x}{1}=g'(0)$，故 $a=g'(0)$。当 $x\neq0$ 时 $f'(x)=\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}$；而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2}=\frac{g''(0)+1}{2}$（分子用泰勒：$g=1+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\cdots$，$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\cdots$）。**答案 $a=g'(0)$，$f'(0)=\frac{g''(0)+1}{2}$。**

### 例 2-15（23–24 正卷）$x^{2n+1}$ 型极限定义的函数

讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-1}{x^{2n+1}+1}$ 的连续性。

解 按 $|x|$ 与 $1$ 的大小分情况：$|x|<1$ 时 $f=-1$；$|x|>1$ 时 $f=1$；$x=1$ 时 $f=0$；$x=-1$ 时分母为 $0$，无定义。故 $x=\pm1$ 是**第一类间断点**（跳跃），其余点连续。**答案 $x=\pm1$ 第一类间断点。**

$x=-1$ 处：$(-1)^{2n+1}=-1$，分母 $-1+1=0$，确实无定义，不是 $0$ —— 这一点每年都有人写错。

### 例 2-16（24–25 第三套）含振荡项的单调性陷阱

设 $f(x)=\begin{cases}x+x^2\sin\dfrac{1}{x^3}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$。（1）求 $f'(x)$；（2）是否存在 $\delta>0$，使 $f$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内单调递增？

解 （1）$x\neq0$ 时 $f'(x)=1+2x\sin\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^2}\cos\frac{1}{x^3}$；$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+x^2\sin(1/x^3)}{x}=1$。（2）**不存在**。因 $f'(x)$ 在 $0$ 的任何邻域内都取到负值：取 $x_k=(2k\pi)^{-1/3}$，则 $\cos\frac{1}{x_k^3}=1$，$f'(x_k)=1-\frac{3}{x_k^2}+o\left(\frac{1}{x_k^2}\right)<0$（$k$ 充分大），故在任意 $(0,\delta)$ 内都有导数为负的点，$f$ 不可能单调增。**答案：不存在。**

这是"$f'(0)>0$ 不能推出邻域内单调增"的标准反例，考的是**导函数不连续**。

## 2.4 导数计算：五种情形，五种写法

| 情形 | 做法 | 易错 |
|---|---|---|
| 显函数 | 直接用公式 + 链式 | 复合层数漏一层 |
| 隐函数 $F(x,y)=0$ | 两边对 $x$ 求导，$y$ 是 $x$ 的函数，$y'$ 留住 | 求二阶时忘记 $y'$ 也要再求导 |
| 参数方程 $x=x(t),y=y(t)$ | $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\cdot\frac{1}{x'}$ | **忘记除以 $x'(t)$**（最高频错误） |
| 幂指 $u^v$ | 取对数或写成 $e^{v\ln u}$ | 直接套 $x^n$ 公式 |
| 高阶 / $n$ 阶 | 拆成"多项式 × 三角函数/指数"，用莱布尼茨 | 用了 $n$ 阶公式却忘了低次项只到有限项 |

**例 2-17（三卷重复）隐函数二阶导**

设 $xy+e^y=e$ 确定 $y=y(x)$，求 $y''(0)$。

解 $x=0$ 时 $e^y=e\Rightarrow y=1$。两边求导：$y+xy'+e^yy'=0$，代入得 $y'(0)=-\frac{1}{e}$。再求导：$y'+y'+xy''+e^y(y')^2+e^yy''=0$，代入 $x=0,y=1,y'=-\frac{1}{e}$：$-\frac{2}{e}+\frac{1}{e}+ey''=0$，得 $y''(0)=\frac{1}{e^2}$。答案 $\frac{1}{e^2}$。

**例 2-18（23–24 第三套、23–24 测绘卷）参数方程求凹凸区间**

设 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$，求曲线 $y=y(x)$ 的下凸区间。

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{2t-2}{3t^2+9}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2t-2}{3t^2+9}\right)}{3t^2+9}=\frac{-6(t-3)(t+1)}{(3t^2+9)^3}$。令其 $>0$ 得 $-1<t<3$。又 $x'(t)=3t^2+9>0$，$x$ 单调，$x(-1)=-10$，$x(3)=54$。答案 下凸区间 $(-10,54)$。

**例 2-19（24–25 第三套）极坐标转参数方程**

等角螺线 $\rho=e^\theta$，在 $\theta=0$ 附近可写成 $y=y(x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=0}$ 与 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=0}$。

解 $x=e^\theta\cos\theta$，$y=e^\theta\sin\theta$。$x'=e^\theta(\cos\theta-\sin\theta)$，$y'=e^\theta(\sin\theta+\cos\theta)$，$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$，$\theta=0$ 时为 $1$。二阶：$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)=\frac{2}{(\cos\theta-\sin\theta)^2}$，故 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{(\cos\theta-\sin\theta)^2}\cdot\frac{1}{e^\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$，$\theta=0$ 时为 $2$。答案 $1$ 与 $2$。

**例 2-20（23–24 第三套）莱布尼茨：多项式 × 三角**

设 $y=(3x-2)^2\sin 2x$，求 $y^{(100)}(0)$。

解 取 $u=(3x-2)^2$，$v=\sin 2x$。$u(0)=4,u'(0)=-12,u''(0)=18,u'''=0$；$v^{(m)}(0)=2^m\sin\frac{m\pi}{2}$，故 $v^{(100)}(0)=0$，$v^{(99)}(0)=-2^{99}$，$v^{(98)}(0)=0$。莱布尼茨展开只剩 $k=1$ 项：$y^{(100)}(0)=C_{100}^1\cdot(-12)\cdot(-2^{99})=75\cdot 2^{103}$。答案 $75\cdot 2^{103}$。

规律：$v^{(m)}(0)=2^m\sin\frac{m\pi}{2}$ 在 $m$ 为偶数时全为 $0$，所以只要 $u$ 是二次多项式，答案只由 $k=1$ 项决定。

**例 2-21（23–24 第四套）先降幂再求 $n$ 阶导**

设 $f(x)=(x\sin x)^2$，求 $f^{(50)}(0)$。

解 $f=x^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2\cos 2x}{2}$。第一项次数低于 $50$，$50$ 阶导为 $0$。第二项用莱布尼茨，只有 $k=2$ 项在 $x=0$ 非零：$-\frac{1}{2}\cdot C_{50}^{2}\cdot 2\cdot(\cos 2x)^{(48)}\big|_0=-\frac{1}{2}\cdot 1225\cdot 2\cdot 2^{48}=-1225\cdot 2^{48}$。答案 $-1225\cdot 2^{48}$。

**例 2-22（23–24 正卷）抽象函数方程求导**

$f$ 在 $x\neq 0$ 有定义，$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f'(1)=1$，求 $f'(x)$。

解 令 $x=y=1$ 得 $f(1)=0$。对任意 $x\neq 0$：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{f'(1)}{x}=\frac{1}{x}$$

答案 $f'(x)=\frac{1}{x}$。

## 2.5 渐近线：三条线，分开算

1. **找无定义点**（分母零点、对数真数零点）→ 算单侧极限，若为 $\infty$ 得铅直渐近线。
2. **算 $x\to\pm\infty$ 的极限** → 若为常数 $b$，得水平渐近线 $y=b$，**此方向不再有斜渐近线**。
3. **算 $a=\lim\frac{f(x)}{x}$、$b=\lim[f(x)-ax]$** → $a\neq 0$ 且都有限，得斜渐近线 $y=ax+b$。$+\infty$ 与 $-\infty$ **分别算**。

**例 2-23（23–24 第二套）两条斜渐近线**

求 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ 的全部渐近线。

解 $x\to 0$ 时 $y\to\infty$，得铅直 $x=0$。$x\to+\infty$：$\frac{y}{x}\to 1$，$y-x=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-x\to 0$，得 $y=x$。

$x\to-\infty$：$\frac{y}{x}\to -1$，$y+x\to 0$，得 $y=-x$。无水平渐近线。答案 $x=0$，$y=x$，$y=-x$。

**例 2-24（22–23 试题 1、试题 3 重复）含 $e^x$ 的斜渐近线**

求 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线。

解 $x\to 0$ 时 $\frac{1}{x}\to\infty$，得铅直 $x=0$。$x\to+\infty$：$\ln(1+e^x)=x+\ln(1+e^{-x})$，故 $y-x\to 0$，得 $y=x$。$x\to-\infty$：$\ln(1+e^x)\to 0$，$y\to 0$，得水平 $y=0$。答案 $x=0$，$y=x$，$y=0$。

## 2.6 单调、极值、凹凸、拐点：一张表写完

答题就写一张表，把定义域、$f'$ 的零点、$f''$ 的零点排序，逐段标正负。表写完，结论自然出来，且**不会漏**。

| 区间 | $\cdots$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ 凸 | 极大 | ↘ 凸 | 拐点 | ↗ 凹 |

**例 2-25（23–24 正卷，9 分）完整列表题**

$f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}+3$，求增减区间、凹凸区间、极值点、拐点、全部渐近线。

解 $f'(x)=\dfrac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}$，$f''(x)=\dfrac{6x}{(1+x)^4}$。驻点 $x=0,-3$；$f''=0$ 于 $x=0$。定义域 $x\neq -1$。

列表得：单增 $(-\infty,-3]$、$(-1,+\infty)$；单减 $[-3,-1)$；**极大值** $f(-3)=-\frac{15}{4}$；$f''<0$ 于 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$，$f''>0$ 于 $(0,+\infty)$，**拐点** $(0,3)$。渐近线：$\lim\limits_{x\to -1}f=\infty$ 得 $x=-1$；$\frac{f(x)}{x}\to 1$，$f(x)-x\to 1$ 得 $y=x+1$。**答案 极大值 $-\frac{15}{4}$，拐点 $(0,3)$，渐近线 $x=-1$ 与 $y=x+1$。**

**例 2-26（23–24 第二套）极值与拐点分开问**

求 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的极值，并求曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

解 $f'(x)=-\dfrac{4(x+2)}{x^3}$，$f''(x)=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$。$x=-2$ 为极小值点，$f(-2)=-3$（$x<-2$ 时 $f'<0$，$-2<x<0$ 时 $f'>0$）。$x=-3$ 处 $f''$ 变号，拐点 $\left(-3,-\frac{26}{9}\right)$。**答案 极小值 $-3$，拐点 $\left(-3,-\frac{26}{9}\right)$。**

**例 2-27（23–24 正卷）隐函数的极值：只能用第二充分条件**

$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定 $y=y(x)$，求极值。

解 求导得 $y'=\dfrac{x-y}{3y^2-2y+x}$，令 $y'=0$ 得 $x=y$，代入原方程得 $x=y=1$。**因 $y'$ 的表达式含 $y$，无法判断两侧符号，改用第二充分条件**：再求导并代入 $(1,1)$ 得 $y''=\frac{1}{2}>0$。**答案 $x=1$ 处取极小值 $y=1$。**

## 2.7 曲率：两问一套

**例 2-28（22–23 试题 1、试题 2 重复，8 分）**

曲线 $y=f(x)$ 过原点且在原点与 $x$ 轴相切，$f''$ 连续，$f''(0)\neq 0$。（1）求原点处曲率半径 $R$；（2）证明 $\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2f(x)}\right|=R$。

解 （1）由题意 $f(0)=0,f'(0)=0$，故 $K=\dfrac{|f''(0)|}{[1+0]^{3/2}}=|f''(0)|$，$R=\dfrac{1}{|f''(0)|}$。（2）由泰勒 $f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$，故 $\dfrac{x^2}{2f(x)}\to\dfrac{1}{f''(0)}$，取绝对值得 $R$。**答案 $R=\frac{1}{|f''(0)|}$。**

## 2.8 中值定理证明：五步骨架 + 构造表

所有"存在 $\xi$ 使某等式成立"的题，都走同一个骨架。**骨架写全就有 80% 的过程分**，即使 $F$ 构造错也拿一半。

1. **换元整理**：把结论中的 $\xi$ 全部换成 $x$，移到一边，写成 $G(x)=0$ 的形式。
2. **认结构造 $F$**：对照 1.3 的构造表，找出"谁的导数等于 $G$"。
3. **验两条件**：$F$ 在 $[a,b]$ 连续、在 $(a,b)$ 可导（一句话，但必须写）。
4. **验端点相等**：$F(a)=F(b)$。**这一步验证不出来，说明 $F$ 造错了。**
5. **下结论**：由罗尔定理 $\exists\xi\in(a,b)$，$F'(\xi)=0$，展开即得。

**例 2-29（23–24 正卷附加题，8 分）系数是函数**

$f, g$ 在 $[a,b]$ 连续、$(a,b)$ 可导，$f(a)=f(b)=0$。证 $\exists \xi \in (a,b)$，$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$。

解 把 $\xi$ 换成 $x$：$f'+fg'=0$，即 $\frac{f'}{f}=-g'$，积分得 $\ln|f|=-g+C$，即 $fe^{g}=C$。故令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$。$F$ 连续可导，$F(a)=F(b)=0$，罗尔得 $F'(\xi)=e^{g(\xi)}\left[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)\right]=0$。因 $e^{g}\neq 0$，故 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$。**证毕。**

这题的关键是"积分法"：把结论当微分方程解一遍，解出的常数表达式就是 $F$。

**例 2-30（23–24 第二套，10 分）系数含 $(1-\xi)$**

$f$ 在 $[1,4]$ 连续、$(1,4)$ 可导，$f(4)=0$。证 $\exists \xi \in (1,4)$，$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$。

解 换元：$(1-x)f'-2f=0$，即 $\frac{f'}{f}=\frac{2}{1-x}$，积分得 $\ln|f|=-2\ln|1-x|+C$，即 $f(1-x)^2=C$。令 $F(x)=(1-x)^2 f(x)$，则 $F(1)=0$（因子为零），$F(4)=0$（因 $f(4)=0$）。罗尔得 $F'(\xi)=0$，即 $(1-\xi)^2 f'(\xi)-2(1-\xi)f(\xi)=0$，约去 $1-\xi\neq 0$ 得结论。**证毕。**

$F(1)=0$ 是**因子自动归零**，不需要题设给 $f(1)=0$。这类"端点靠因子归零"的题，识别信号是结论里有 $(x-a)$ 的幂。

**例 2-31（23–24 第三套，6 分）$f'(\xi)=\alpha f(\xi)$**

$f$ 在 $[a,b]$ 连续、$(a,b)$ 可导，$f(a)=f(b)=0$，$\alpha \in \mathbb{R}$。证 $\exists \xi \in (a,b)$，$\alpha f(\xi)=f'(\xi)$。

解 换元：$f'-\alpha f=0$，积分得 $fe^{-\alpha x}=C$。令 $F(x)=e^{-\alpha x}f(x)$，$F(a)=F(b)=0$，罗尔得 $e^{-\alpha\xi}\left[f'(\xi)-\alpha f(\xi)\right]=0$，因 $e^{-\alpha\xi}\neq 0$，故 $f'(\xi)=\alpha f(\xi)$。**证毕。**

**例 2-32（20–21、22–23 重复，6 分）含二阶导：两次罗尔**

$f$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$。证 $\exists \xi \in (0,1)$，$f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$。

解 先对 $f$ 用罗尔：$\exists c \in (0,1)$，$f'(c)=0$。再令 $F(x)=xf'(x)$，则 $F$ 在 $[0,c]$ 连续、$(0,c)$ 可导，且 $F(0)=0$（因子），$F(c)=cf'(c)=0$。罗尔得 $F'(\xi)=f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$。**证毕。**

结论含 $f''$ 的固定套路：**先把 $f'$ 当新函数，对它用罗尔**，得到中间点 $c$，再在 $[0,c]$ 或 $[c,1]$ 上用第二次。

**例 2-33（柯西型，与 23–24 第三套第 9 题同型）**

$f$ 在 $[a,b]$（$0<a<b$）连续、$(a,b)$ 可导。证 $\exists \xi \in (a,b)$，$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$。

解 结论可写成 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$，右边是 $\dfrac{f'(\xi)}{1/\xi}$。取 $g(x)=\ln x$，在 $[a,b]$ 上用柯西中值定理即得。**证毕。**

识别信号：结论里出现 $\ln\frac{b}{a}$、$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$、$b^2-a^2$ 这类"另一个函数的增量"，就是柯西，分母那个函数就是 $g$。

**例 2-34（双中值，10 分）零点定理定分点 + 两次拉格朗日**

$f$ 在 $[0,1]$ 连续、$(0,1)$ 可导，$f(0)=0, f(1)=1$。证明存在**互异**的 $\xi,\eta\in(0,1)$，使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$。

解 关键是先找"分点" $x_0$，使两段差商之积为 $1$。令 $F(x)=f(x)+x-1$，则 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，由零点定理存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x_0)=1-x_0$。在 $[0,x_0]$ 上用拉格朗日：$f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\dfrac{1-x_0}{x_0}$；在 $[x_0,1]$ 上：$f'(\eta)=\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\dfrac{x_0}{1-x_0}$。两式相乘得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$，且 $\xi\in(0,x_0)$、$\eta\in(x_0,1)$ 自动互异。**证毕**。

双中值题的通用结构：**先造一个分点（零点定理或介值定理），再在两段上各用一次中值定理**，最后让两个式子相乘或相加消去分点。分点的选择由"目标式"反推。

**例 2-35（22–23 试题 2，15 分）泰勒余项中 $\theta$ 的极限**

$f$ 三阶连续可导，$f'''(a)\neq 0$，$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a+\theta h)$，$0<\theta<1$。证 $h\to 0$ 时 $\theta\to\frac{1}{3}$。

解 左边按 $h$ 展开到三阶：$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(a)+o(h^3)$。右边把 $f''(a+\theta h)$ 展开：$f''(a)+\theta h f'''(a)+o(h)$，乘 $\frac{h^2}{2}$ 得 $\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{\theta h^3}{2}f'''(a)+o(h^3)$。比较 $h^3$ 项：$\frac{1}{6}=\frac{\theta}{2}$，故 $\theta\to\frac{1}{3}$。**证毕**。

## 2.9 零点定理与根的个数

**存在性**：找两点异号 + 连续。**唯一性**：加一步"$f'$ 不变号"或"$f$ 严格单调"。**个数**：把区间按单调性分段，每段最多一个根，再算端点符号。

**例 2-36（20–21，8 分）存在 + 唯一**

证明 $xe^x=2$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根。

解 令 $f(x)=xe^x-2$，$f(0)=-2<0$，$f(1)=e-2>0$，零点定理得存在。又 $f'(x)=(1+x)e^x>0$ 于 $(0,1)$，$f$ 严格增，故唯一。**证毕**。

**例 2-37（23–24 正卷，6 分）偶函数 + 分段单调**

证明 $|x|^{1/4}+|x|^{1/2}-\cos x=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有 2 个不同实根。

解 $f$ 为偶函数，只需看 $(0,+\infty)$。$x>1$ 时 $f>1-1=0$（因 $|x|^{1/4}>1$，$\cos x\le 1$），故根只能在 $(0,1)$。$f(0)=-1<0$，$f(1)=2-\cos 1>0$，存在一根；又 $0<x<1$ 时 $f'(x)=\frac{1}{4}x^{-3/4}+\frac{1}{2}x^{-1/2}+\sin x>0$，严格增，故 $(0,1)$ 内唯一。由偶性，$(-\infty,0)$ 内也唯一。**证毕**。

**例 2-38（23–24 正卷，6 分）介值定理：几何平均**

$f$ 在 $[a,b]$ 连续且恒正，$\forall x_1<x_2\in(a,b)$。证 $\exists\xi\in[x_1,x_2]$，$f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$。

解 若 $f(x_1)=f(x_2)$ 取 $\xi=x_1$。否则不妨 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x_1)<\sqrt{f(x_1)f(x_2)}<f(x_2)$，由介值定理存在 $\xi$。**证毕**。

**例 2-39（23–24 第二套，12 分）导数符号 → 极限保号性**

$f$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$。证 $\exists \xi\in(a,b)$，$f(\xi)=0$。

解 不妨 $f'(a)>0, f'(b)>0$。由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ 及**极限保号性**，存在 $x_1>a$ 使 $\frac{f(x_1)}{x_1-a}>0$，故 $f(x_1)>0$。同理由 $f'_-(b)>0$ 得存在 $x_2<b$ 使 $\frac{f(x_2)}{x_2-b}>0$，因 $x_2-b<0$，故 $f(x_2)<0$。在 $[x_1,x_2]$ 上用零点定理即得。**证毕**。

这题的难点是"$f'(b)>0$ 却推出 $f(x_2)<0$"，因为 $x_2-b<0$，分母为负，商为正说明分子为负。

## 2.10 不等式证明：五种武器，按顺序试

| 方法 | 识别信号 | 动作 |
|---|---|---|
| ① **单调性** | 两边可比较、含同一变量 | 移项造 $F$，证 $F'\geq 0$ 且 $F(a)\geq 0$ |
| ② **最值** | 证"恒 $\geq$ 某常数" | 求 $F$ 的最小值，证最小值 $\geq 0$ |
| ③ **拉格朗日** | 出现 $f(b)-f(a)$ 或两函数值之差 | $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，再估 $f'(\xi)$ |
| ④ **泰勒** | 条件给二阶导符号 | 展开到带拉格朗日余项，用 $f''$ 符号定号 |
| ⑤ **凸性（琴生）** | 形如 $\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ | 验证 $f''\geq 0$ |

**例 2-40（24–25 第三套，10 分）二元不等式：固定一个变量**

$a>0, b>0$，证明 $ab-e^{a-1}\leq b\ln b$。

解 把 $b$ 看作变量，令 $F(b)=b\ln b-ab+e^{a-1}$（$b>0$）。$F'(b)=\ln b+1-a$，驻点 $b=e^{a-1}$；$F''(b)=\frac{1}{b}>0$，故为最小值。$F\left(e^{a-1}\right)=e^{a-1}(a-1)-ae^{a-1}+e^{a-1}=0$。所以 $F(b)\geq 0$，即 $b\ln b\geq ab-e^{a-1}$。**证毕**。

双变量不等式的通用策略：**把其中一个当常数，对另一个求最值**。别一上来就想均值不等式。

**例 2-41（24–25 第二套，8 分）拉格朗日 + 导函数单调**

设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4(b-a)}{e^2}$。

解 令 $f(x)=\ln^2 x$，在 $[a,b]$ 上用拉格朗日：$\ln^2 b-\ln^2 a=\dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)$，$\xi\in(a,b)$。令 $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}<0$（$x>e$），故 $g$ 在 $(e,e^2)$ 上严格减，$g(\xi)>g(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$。代入即得。**证毕**。

**例 2-42（23–24 第四套，10 分）取对数后构造同一函数**

$x>0$，常数 $a>e$，证明 $(a+x)^a<a^{a+x}$。

解 两边取对数，等价于 $a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$，即 $\dfrac{\ln(a+x)}{a+x}<\dfrac{\ln a}{a}$。令 $g(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，$g'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}<0$（$t>e$）。因 $a>e$ 且 $a+x>a>e$，故 $g(a+x)<g(a)$。**证毕**。

幂指型不等式（$u^v$ 与 $v^u$ 比较）一律先取对数，化成 $\frac{\ln t}{t}$ 的单调性。

**例 2-43（23–24 第三套，6 分）凸性 / 琴生**

$a>0,b>0$，证明 $\dfrac{a\ln a+b\ln b}{a+b}\geq\ln\dfrac{a+b}{2}$。

解 令 $\varphi(t)=t\ln t$，$\varphi''(t)=\frac{1}{t}>0$，故 $\varphi$ 为凸函数。由琴生不等式 $\dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\geq\varphi\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，即 $\dfrac{a\ln a+b\ln b}{2}\geq\dfrac{a+b}{2}\ln\dfrac{a+b}{2}$，两边乘 $\dfrac{2}{a+b}$ 即得。**证毕**。

**例 2-44（23–24 第二套，13 分）泰勒证不等式**

$f''(x)>0$ 于 $(-\infty,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$。证 $f(x)\geq x$。

解 由极限存在且 $f''$ 存在知 $f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$。对任意 $x$，泰勒展开：

$f(x)=f(0)+xf'(0)+\dfrac{x^2}{2}f''(\xi)=x+\dfrac{x^2}{2}f''(\xi)\geq x$（$\xi$ 在 0 与 $x$ 之间）。**证毕**。

## 2.11 泰勒公式：三种考法

**考法一：证带佩亚诺余项的泰勒公式**（23–24 第四套）。设 $R(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\right]$，对 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^2}$ 连用两次洛必达，得 $\lim\frac{f''(x)-f''(x_0)}{2}=0$（因 $f''$ 连续），故 $R=o((x-x_0)^2)$。

**考法二：定 $\theta$ 的极限**（见例 2-35）。**考法三：证不等式 / 估值**（见例 2-44、2-46）。

**例 2-45（泰勒估阶，8 分）**

设 $f$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$|f''(x)|\leq M$，$f(0)=f(1)=0$。证明 $\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leq\dfrac{M}{4}$。

解 在 $x=\frac{1}{2}$ 处展开：$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}f''(\xi_1)$，$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}f''(\xi_2)$。两式相减：$0=f'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)]$，故 $\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leq\frac{1}{8}\cdot2M=\frac{M}{4}$。**证毕**。

## 2.12 不定积分：五类，一眼定法

| 类型 | 识别信号 | 首步动作 |
|---|---|---|
| **凑微分** | 被积式里有某个函数的导数 | 把 $g'(x)dx$ 收进 $d[g(x)]$ |
| **第二类换元** | $\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{a^2+x^2}$、$\sqrt{x^2-a^2}$ | $x=a\sin t$、$a\tan t$、$a\sec t$ |
| **分部** | 幂 × 指/三角/对数/反三角 | 按"反对幂三指"选 $u$ |
| **有理函数** | 多项式之比，分母可因式分解 | 假分式先除，再部分分式 |
| **三角有理式** | $\sin x,\cos x$ 的有理式 | 先看奇偶性，最后才万能代换 |

**例 2-46（24–25 第三套，10 分）凑微分：认准内层**

求 $\displaystyle\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$。

解 注意到 $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$，故原式 $=\displaystyle\int\frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2}=-\frac{1}{\arcsin x}+C$。答案 $-\dfrac{1}{\arcsin x}+C$。

**例 2-47（24–25 第三套，10 分）拆项 + 半角公式**

求 $\int \dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$。

解 拆成两项。$\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\dfrac{x}{2}$；$\dfrac{x}{1+\cos x}=\dfrac{x}{2\cos^2(x/2)}=\dfrac{x}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}$，其积分为 $x\tan\dfrac{x}{2}-\int\tan\dfrac{x}{2}dx=x\tan\dfrac{x}{2}+2\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$。两项合并，对数项抵消。**答案 $x\tan\dfrac{x}{2}+C$。**

$\int\tan\frac{x}{2}dx=-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$，负号别丢，正好与第一项的 $+2\ln|\cos|$ 抵消——这是本题设计的巧处。

**例 2-48（24–25 第二套，8 分）配方 + 拆分子**

求 $\int\dfrac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$。

解 配方：$1+2x-x^2=2-(x-1)^2$。把分子凑成"内层导数 + 常数"：$2x+3=2(x-1)+5$。于是原式 $=2\int\dfrac{(x-1)dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}+5\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}=-2\sqrt{2-(x-1)^2}+5\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+C$。**答案 $-2\sqrt{1+2x-x^2}+5\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+C$。**

**例 2-49（24–25 第二套，8 分）三角有理式：万能代换**

求 $\int\dfrac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$。

解 令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$，代入化简得

$$\int\frac{(1+t^2)\,dt}{t(3+t^2)}=\int\left(\frac{1}{3t}+\frac{2t}{3(3+t^2)}\right)dt=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{1}{3}\ln(3+t^2)+C$$

回代 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ 即得。**答案 $\dfrac{1}{3}\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+\dfrac{1}{3}\ln\left(3+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)+C$。**

**例 2-50（24–25 第三套，10 分）原函数概念 + 分部**

已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\cos x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$。

解 分部：$\int xf'(x)dx=xf(x)-\int f(x)dx$。由题设 $\int f(x)dx=\dfrac{\cos x}{x}+C$，且 $f(x)=\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)'=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$。故 $xf(x)=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x}$，减去 $\dfrac{\cos x}{x}$ 得 $-\sin x-\dfrac{2\cos x}{x}+C$。**答案 $-\sin x-\dfrac{2\cos x}{x}+C$。**

"$f$ 的一个原函数是 $F$"意味着两件事：$\int f=F+C$，且 $f=F'$。两句都用上，题就解完了。

**例 2-51（分部三类经典，必背）**

$\int x\arctan x\,dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+C$。

$\int e^x\cos x\,dx=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+C$（两次分部后移项）。

$\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C$；$\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$。

**例 2-52（有理函数，6 分）部分分式**

求 $\int\frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$。

解 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$。设 $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$，得 $A=-3$（$x=2$ 处），$B=4$（$x=3$ 处）。积分得 $-3\ln|x-2|+4\ln|x-3|+C$。**答案 $4\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$。**

**不定积分四个必扣分点**

① 忘写 $+C$（每道题都扣）。② 换元后忘记回代（$t$ 换回 $x$）。③ $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$ 漏绝对值。④ 三角代换后忘记用三角形回代 $\sin t,\cos t$。

### 2.13 一致连续：只考定义

**例 2-53（22–23 试题 3，6 分）**

$f,g$ 在区间 $I$ 上一致连续，证明 $f+g$ 在 $I$ 上一致连续。

解 $\forall\varepsilon>0$，由 $f$ 一致连续，$\exists\delta_1>0$，当 $x,y\in I$、$|x-y|<\delta_1$ 时 $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$；同理 $\exists\delta_2>0$ 使 $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$。取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，则 $|x-y|<\delta$ 时

$|(f+g)(x)-(f+g)(y)|\le|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|<\varepsilon$。**证毕。**

一致连续与连续的区别只在 $\delta$：连续时 $\delta$ 依赖 $x_0$，一致连续时 $\delta$ 只依赖 $\varepsilon$。**答题时必须写出"$\delta$ 与 $x,y$ 无关"这个意思**，否则扣分。开区间上判定的常用结论：$(a,b)$ 上连续且两端单侧极限存在 $\Leftrightarrow$ 一致连续。

SECTION 3

## 易错：这 30 处，年年有人丢分

每条都是"错在哪 → 正确做法"。标 高频 的是真题里反复出现的扣分点。

### 3.1 第 1 章 · 极限与连续

01 **加减中用等价替换。** $\tan x-\sin x\sim x-x=0$ 是错的。→ 加减中先合并、提公因子，把加减变成乘除；或直接上泰勒到足够阶（$\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$）。高频

02 **泰勒展开阶数不够。** 分母是 $x^4$，分子只展到 $x^2$，结果必错。→ 先看分母的阶，分子至少展到同阶。高频

03 **洛必达不验型。** $\frac{1}{0}$、$\frac{\infty}{0}$ 都不是未定式。→ 用前先代入，确认是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$。

04 **洛必达后极限不存在就断言原极限不存在。** $\lim\frac{x+\sin x}{x}$ 求导后振荡，但原极限为 $1$。→ 洛必达只是充分条件，失效时改用夹逼或等价。

05 **$1^\infty$ 型直接写 $e$。** 必须算 $\lim v(u-1)$。→ $u^v = e^{v\ln u} \to e^{\lim v(u-1)}$，指数要算出来。

06 **数列极限用洛必达。** $n$ 是离散变量，不能求导。→ 用夹逼或单调有界准则。

07 **间断点只看"没定义的点"。** 分段函数的分段点即使有定义，也要查左右极限。→ 候选点 = 分母零点 + 对数真数零点 + 分段点 + 定义域端点。

08 **$x=-1$ 处误判 $x^{2n+1}$ 型极限。** 分母为 $0$，无定义，不是 $0$。→ 分别讨论 $|x|<1$、$|x|>1$、$x=\pm1$ 四种情形。

## 3.2 第 2 章 · 导数与微分

09 **分段点用求导公式。** $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 在 $0$ 处不能用公式。→ 分段点一律用**定义**：$\lim\frac{f(x)-f(0)}{x}$。 高频

10 **参数方程二阶导忘记除以 $x'(t)$。** $\frac{d^2y}{dx^2}\neq\frac{y''}{x''}$。→ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\cdot\frac{1}{x'}$。 高频

11 **隐函数求二阶导时把 $y'$ 当常数。** → 对一阶式再求导时，$y$ 和 $y'$ 都是 $x$ 的函数，都要用链式。

12 **幂指函数套 $x^n$ 公式。** $(\sin x)^x$ 不是幂函数。→ 取对数或写 $e^{x\ln\sin x}$。

13 **莱布尼茨展开时漏项或多项。** $u$ 是三次多项式时，$k=0,1,2,3$ 四项都要写。→ 先列 $u^{(k)}$ 在目标点的值，为 $0$ 的项直接划掉。

14 **$(\sin ax)^{(n)}$ 漏 $a^n$。** → 每次求导都出一个 $a$，共 $n$ 个。

15 **斜渐近线只算 $x\to+\infty$。** → $x\to-\infty$ 要另算，可能得到另一条（如 $y=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ 有 $y=x$ 与 $y=-x$）。

16 **有水平渐近线还写斜渐近线。** 同一方向二者不可兼得。→ 先算水平，存在则跳过该方向的斜渐近线。

## 3.3 第 3 章 · 中值定理与应用

17 **造出 $F$ 后不验 $F(a)=F(b)$。** 验不出来说明 $F$ 造错了。→ 五步骨架第 4 步不能省。 高频

18 **写"由罗尔定理"却不写条件。** → 必须写"$F$ 在 $[a,b]$ 连续、$(a,b)$ 可导、$F(a)=F(b)$"三句。

19 **把"存在 $\xi$"写成"存在 $\xi\in[a,b]$"。** 罗尔给的是开区间。→ 结论统一写 $\xi\in(a,b)$。

20 **从 $F'(\xi)=0$ 直接约掉因子不说理由。** → 补一句"因 $e^{g(\xi)}\neq0$"或"因 $\xi\neq0$"。

21 **极值点与驻点混淆。** 驻点不一定极值（$y=x^3$ 在 $0$），极值点不一定可导（$y=|x|$ 在 $0$）。→ 答"极值点"要同时给 $x$ 与函数值。

22 **拐点写成 $x$ 坐标。** 拐点是**点**，要写 $(x_0,f(x_0))$。

23 **凹凸叫法反转。** 本教材"凸"= $f''>0$。→ 答题直接写"$f''>0$ 的区间为…"，不要只写"凸区间"。

24 **隐函数极值用第一充分条件。** $y'$ 含 $y$，无法判两侧符号。→ 改用第二充分条件，算 $y''$ 在该点的值。

25 **零点定理只证"存在"就交卷。** 题目问"有且仅有一个"时必须补单调性。→ $f'$ 不变号 ⇒ 唯一。

26 **不等式证明直接两边求导。** → 移项造 $F(x)=$ 左 $-$ 右，证 $F\geq0$；或证 $F$ 的最小值 $\geq0$。

### 3.4 第 4 章 · 不定积分

27 **忘写 $+C$。** 每题都扣，且是"送分变送命"。 高频

28 **换元后不回代。** 答案必须是 $x$ 的函数。→ 最后一步用 $t=\cdots$ 代回，或画三角形。

29 **$\int \frac{dx}{x}$ 写成 $\ln x$。** → 必须 $\ln|x|$。同理 $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$。

30 **把"原函数"当成"导数"。** "$F$ 是 $f$ 的原函数"意味着 $F'=f$，$\int f = F+C$。→ 两句话都写出来再动笔。

SECTION 4

## 答题规范：会做，还要写对

### 4.1 每种题型必须写出什么

| 题型 | 必须出现的句子 / 步骤 | 常见扣分 |
|---|---|---|
| 求极限 | 指出型态（"此为 $\frac{0}{0}$ 型"）→ 说明用了什么（等价替换 / 泰勒 / 洛必达）→ 结果 | 直接写答案，无过程 |
| 分段点可导 | $f(0)$、左右极限、左右导数**四个**都算，写"由 $f'_+=f'_-$ 知可导" | 只算一边 |
| 隐函数 / 参数方程 | 写出求导后的方程；二阶导写出 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\cdots)\cdot\frac{1}{x'}$ | 二阶导漏 $1/x'$ |
| 列表作图题 | 定义域 → $f'$、$f''$ → 零点 → **表格** → 结论（增减、极值、凹凸、拐点、渐近线） | 不列表，结论散落 |
| 中值定理证明 | "令 $F(x)=\cdots$" → "$F$ 在 $[a,b]$ 连续、$(a,b)$ 可导" → "$F(a)=F(b)=\cdots$" → "由罗尔定理…" → 展开得结论 → "证毕" | 缺条件验证 |
| 零点定理 | "令 $f(x)=\cdots$" → "$f$ 在 $[\cdot,\cdot]$ 连续" → 算两端值 → "由零点定理…" | 不写连续性 |
| 不等式 | "令 $F(x)=\cdots$" → "$F'(x)=\cdots$" → 判号 → "$F$ 在…单调增，$F(a)=0$，故 $F(x)\geq 0$" | 只算导数不判号 |
| 不定积分 | 换元写"令 $t=\cdots$，$dx=\cdots$" → 积分 → **回代** → $+C$ | 不回代、漏 $C$ |

### 4.2 120 分钟怎么分

| 时段 | 题号 | 任务 | 用时 |
|---|---|---|---|
| 第 1 轮 | 全部 | 扫一遍，把"一看就会"的题先做完（通常 50–60 分） | 40 min |
| 第 2 轮 | 剩余计算题 | 极限、导数、积分，一题一题啃 | 40 min |
| 第 3 轮 | 证明题 | 先写骨架（造 $F$ + 验条件），再补细节 | 30 min |
| 第 4 轮 | 检查 | 查 $+C$、查绝对值、查定义域、查"$\xi\in(a,b)$" | 10 min |

> **不会做的题怎么抢分**
>
> **证明题**：把结论里的 $\xi$ 换成 $x$，写出"令 $F(x)=$（猜一个）"，再写"$F$ 在 $[a,b]$ 连续、$(a,b)$ 可导"，即使没证出来也能拿 1–2 分。**计算题**：写出型态判断、写出等价替换的那一步，过程分照给。**作图题**：先求 $f'$、$f''$ 并写出零点，即使表格没画完也有分。

### 4.3 交卷前 60 秒检查清单

- 不定积分是不是都带了 $+C$？$\ln$ 里是不是都带了绝对值？

- 参数方程二阶导是不是除以了 $x'(t)$?
- 分段点是不是用定义算的? 左右导数是不是都写了?
- 中值定理是不是写了"连续 + 可导 + 端点相等"三句? $\xi$ 是不是开区间?
- 拐点是不是写成了坐标点? 极值是不是给了函数值?
- 渐近线是不是把 $x \to -\infty$ 也算了?
- 题目问"几个根", 是不是证了唯一性?

SECTION 5

## 分章习题：52 题，题后即答案

题目按章排列，难度贴近真题。**先盖住答案做**，做完再对。带 `真题` 标记的是往年卷原题或同型改数。

### 5.1 第 1 章 · 极限与连续（12 题）

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ 答：$\frac{1}{2}$（泰勒）

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ 答：$-\frac{1}{2}$

3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ 答：$\frac{1}{2}$（通分后分子 $\sim \frac{x^2}{2}$）

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x}$ 答：$\frac{1}{4}$

5 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{2/x}$ 答：$e^6$

6 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ 答：$e^{-1/6}$（取对数，$\ln\frac{\sin x}{x}\sim -\frac{x^2}{6}$）

7 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$ 答：$\frac{1}{2}$（求和得 $\frac{n(n+1)}{2n^2}$）

8 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$ 答：$3$（提出 $3^n$ 后夹逼）

9 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$ 答：$1$（$x^x-1\sim x\ln x$）

10 求 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点并分类 答：$x=1$ 可去（约分后极限 $-2$）；$x=2$ 无穷（第二类）

11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$ 答：$\frac{1}{3}$

12 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 答：$\frac{1}{2}$（分子有理化）

### 5.2 第 2 章 · 导数与微分（12 题）

13 $y=x^{\sin x}$，求 $y'$ 答：$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

14 $y=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $y'$ 答：$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

15 $x^3+y^3-3axy=0$，求 $y'$ 答：$y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$

16 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 答：$-\dfrac{1}{4\sin^4(t/2)}$

17 $y = x^2\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}(0)$ 答：$n=2$ 时为 $0$；$n \geq 3$ 时为 $n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!$

18 $y = (x^2+1)e^x$，求 $y^{(n)}$ 答：$e^x\left[x^2 + 2nx + n^2 - n + 1\right]$

19 $y = \dfrac{x^3}{1-x}$，求 $y^{(n)}$（$n \geq 3$） 答：$\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$（先做除法化为 $-(x^2+x+1) + \frac{1}{1-x}$）

20 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$ 并讨论 $f'$ 在 $0$ 处的连续性 答：$f'(0) = 0$；$x \neq 0$ 时 $f' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$；$\lim\limits_{x\to 0} f'$ 不存在，故 $f'$ 在 $0$ 处不连续

21 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $x = 0$ 处是否可导 答：不可导，$y' \to \infty$（有垂直切线）

22 求 $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ 的全部渐近线 答：$x = -1$；$y = x - 1$

23 求 $y = xe^{-x}$ 的单调区间与极值 答：增 $(-\infty, 1)$，减 $(1, +\infty)$，极大值 $y(1) = \frac{1}{e}$

24 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处是否可导 答：不可导，$f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$

## 5.3 第 3 章 · 中值定理与应用（14 题）

25 证明 $x > 0$ 时 $\ln(1+x) < x$ 答：令 $f = x - \ln(1+x)$，$f' = \frac{x}{1+x} > 0$，$f(0) = 0$

26 证明 $x > 1$ 时 $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ 答：令 $f = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$，$f' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} > 0$（$x > 1$），$f(1) = 0$

27 证明 $x > 0$ 时 $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ 答：令 $f = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$，$f' = e^x - 1 - x > 0$，$f(0) = 0$

28 证明 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个根 答：$f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0$；$f' = 3x^2 - 3 < 0$ 单调

29 证明 $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$ 答：拉格朗日，$|\frac{1}{1+\xi^2}| \leq 1$

30 设 $a > b > 0$，证明 $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$ 答：对 $\ln x$ 在 $[b, a]$ 上用拉格朗日

31 $f$ 在 $[a,b]$（$0 < a < b$）连续、$(a,b)$ 可导，证 $\exists \xi$：$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$ 答：柯西，$g(x) = \ln x$

32 证明 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时 $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x$ 答：右边用 $f = x - \sin x$ 单调；左边用 $\sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的凸性（弦在曲线上方）

33 $f$ 在 $[0,2]$ 连续、$(0,2)$ 可导，$f(0) = f(2) = 0$，证 $\exists \xi \in (0,2)$：$f'(\xi) = f(\xi)$ 答：令 $F = e^{-x}f(x)$，罗尔

34 $f$ 在 $[0,1]$ 连续、$(0,1)$ 可导，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$，证 $\exists \xi$：$f'(\xi) = 2\xi$ 答：令 $F = f(x) - x^2$，$F(0) = F(1) = 0$，罗尔

35 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的极值与拐点 答：极大 $f(-1) = 10$，极小 $f(3) = -22$，拐点 $(1, -6)$

36 求 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ 的单调区间、极值、拐点、渐近线 答：极小 $y(-1) = -\frac{1}{2}$，极大 $y(1) = \frac{1}{2}$；拐点 $(0,0)$，$\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$；水平渐近线 $y = 0$

37 证明 $x > 0$ 时 $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ 答：泰勒带拉格朗日余项，$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos\xi$

38 $f$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$|f''(x)|\le M$，证 $\left|f'\left(\frac12\right)\right|\le\dfrac{M}{4}$ 答：在 $x=\frac12$ 处对 0 与 1 分别泰勒展开，两式相减

### 5.4 第 4 章 · 不定积分（14 题）

39 $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ 答：$\frac13(1+x^2)^{3/2}+C$

40 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}$ 答：$\ln|\ln x|+C$

41 $\displaystyle\int\frac{e^{\sqrt x}}{\sqrt x}dx$ 答：$2e^{\sqrt x}+C$

42 $\displaystyle\int x^2e^x dx$ 答：$e^x(x^2-2x+2)+C$

43 $\displaystyle\int\ln^2 x\,dx$ 答：$x\ln^2x-2x\ln x+2x+C$

44 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$ 答：$\frac12\arctan\frac{x+1}{2}+C$

45 $\displaystyle\int\sin^3x\,dx$ 答：$-\cos x+\frac13\cos^3x+C$

46 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$ 答：$\ln|\tan x|+C$（分子分母同除 $\cos^2x$ 或拆成 $\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{\cos^2+\sin^2}{\sin\cos}$）

47 $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$ 答：$\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+C$

48 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ 答：$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

49 $\displaystyle\int\sec^3x\,dx$ 答：$\frac12(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$

50 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}dx$ 答：$\ln|x|-\frac{2}{x-1}+C$（部分分式 $\frac1x+\frac{2}{(x-1)^2}$）

51 $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 答：$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

52 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x}}$ 答：$-2\sqrt{1-x}+2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)+C$

SECTION 6

## 整卷：三套，限时模拟

三套卷分别对应三种用途：**A 卷**按 24–25 新结构自编（四章均衡、含积分，最贴近今年）；**B 卷**是 23–24 第四套真题（无答案版，难度偏高）；**C 卷**是 24–25 遥感学院真题（含不定积分，最接近真实难度）。答案在每套卷之后。

# 模拟卷 A

高等数学 A1 期中 · 100 分 · 120 分钟 · 覆盖第 1–4 章

## 一、求极限（每题 10 分，共 20 分）

**1** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$

**2** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

## 二、连续与可导（10 分）

**3** 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$。（1）求 $a$ 使 $f$ 在 $x=0$ 连续；（2）求 $f'(0)$。

## 三、导数计算（每题 10 分，共 20 分）

**4** 设 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=t^3-3t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ 与 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$。

**5** 设 $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(n)}(0)$（$n\geq 2$）。

## 四、函数性态（10 分）

**6** 求曲线 $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ 的全部渐近线。

## 五、证明题（每题 10 分，共 20 分）

**7** 设 $f$ 在 $[0,1]$ 上连续、在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=2\xi$。

**8** 证明：当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$。

## 六、不定积分（每题 10 分，共 20 分）

**9** （1）$\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$；（2）$\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$。

**10** $\displaystyle\int\frac{dx}{1+e^x}$。

A-1 通分：$\dfrac{x^2-2(1-\cos x)}{x^2(1-\cos x)}$。分母 $\sim \frac{x^4}{2}$，分子 $= x^2-2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)=\frac{x^4}{12}$，故极限 $\frac{1}{6}$。

A-2 取对数：$\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$，而 $\ln\dfrac{\sin x}{x}\sim -\dfrac{x^2}{6}$，故极限 $e^{-1/6}$。

A-3 （1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$，故 $a=\frac{1}{2}$。（2）$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-1-x)/x^2-1/2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x-x^2/2}{x^3}=\frac{1}{6}$。

A-4 $\frac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2-3}{2t+2}=\dfrac{3(t-1)}{2}$，$t=1$ 时为 $0$；$\frac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(3/2)}{2t+2}=\dfrac{3}{4(t+1)}$，$t=1$ 时为 $\frac{3}{8}$。

A-5 莱布尼茨：$u=x^2$，$v=e^{2x}$，$v^{(m)}(0)=2^m$。$y^{(n)}(0)=C_n^2\cdot 2\cdot 2^{n-2}=n(n-1)2^{n-2}$。

A-6 $y=x+3+\dfrac{3}{x-1}$。铅直 $x=1$；斜渐近线 $y=x+3$；无水平渐近线。

A-7 令 $F(x)=f(x)-x^2$，则 $F(0)=0$，$F(1)=0$，$F$ 在 $[0,1]$ 连续、$(0,1)$ 可导，由罗尔定理存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=f'(\xi)-2\xi=0$。

A-8 令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$（$x>0$），$f(0)=0$，故 $f(x)>0$。

A-9 （1）$\ln(x^2+x+1)+C$（分子恰为分母导数）。（2）$-x\cos 2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$。

A-10 $\displaystyle\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=x-\ln(1+e^x)+C$。

# 模拟卷 B（2023–2024 第四套真题）

高等数学 A1 期中 · 100 分 · 120 分钟 · 难度偏高，无原始答案

## 一、（6 分 × 4 = 24 分）求极限

1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[4]{\cos\sqrt{x}}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{1-\cos x}-1\right)\ln(1+\tan x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}$

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^2\left[\ln(1+x)-x\right]}$

## 二、（10 分）

5 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$（$n=1,2,\cdots$）。证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限。

## 三、（8 分）

6 设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)\neq 0$，且 $\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f\left(e^{3t}-1\right)\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$ 与 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$。

## 四、（8 分）

7 设函数 $f(x)=(x\sin x)^2$，求 $f^{(50)}(0)$。

## 五、（8 分）

8 设函数 $\varphi(u)$ 可微，求函数 $y=\ln\left[\varphi^2(\sin x)\right]$ 的微分 $dy$。

## 六、（10 分）

9 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$。证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$（$n$ 为正整数）。

## 七、（10 分）

10 设 $x>0$，常数 $a>e$，证明：$(a+x)^a<a^{a+x}$。

## 八、（10 分）

11 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处二阶可导，证明：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)。$$

## 九、（12 分）

12 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且满足 $y'=x^2+y^2$，$y(0)=0$。（Ⅰ）研究 $y(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的单调性和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸性（8 分）；（Ⅱ）求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^4}$（4 分）。

B-1 夹逼：$1 \le \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{1/n} \le n^{1/n} \to 1$，极限 $1$。

B-2 $\cos\sqrt{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$，故 $\sqrt[4]{\cos\sqrt{x}} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{1/4} + o(x) \to 1$。

B-3 分子：$e^{1-\cos x} - 1 \sim 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$，$\ln(1+\tan x) \sim x$，故分子 $\sim \frac{x^3}{2}$。分母：$\sqrt{1+x} - \sqrt{1+\sin x} = \dfrac{x - \sin x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\sin x}} \sim \dfrac{x^3/6}{2} = \dfrac{x^3}{12}$。极限 $= 6$。

B-4 分母 $\sim -\frac{x^4}{2}$；分子 $\cos x - e^{-x^2/2} = -\frac{x^4}{12} + o(x^4)$。极限 $\frac{1}{6}$。

B-5 归纳得 $0 < x_n < 3$。$x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n(3-2x_n)$，故 $x_n < \frac{3}{2}$ 时递增、$x_n > \frac{3}{2}$ 时递减，结合有界得单调有界，极限存在。设极限为 $A$，由 $A^2 = A(3-A)$ 得 $A = \frac{3}{2}$（$A=0$ 舍去）。

B-6 $\frac{dx}{dt} = f'(t)$，$\frac{dy}{dt} = 3e^{3t}f'\left(e^{3t}-1\right)$。$t=0$ 时 $\frac{dy}{dx} = \dfrac{3f'(0)}{f'(0)} = 3$。二阶导按 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/f'(t)$ 计算，代入 $t=0$ 得 $\dfrac{9}{f'(0)} + \dfrac{6f''(0)}{[f'(0)]^2}$（$f'(0)\neq 0$ 时）。

B-7 $f = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2\cos 2x}{2}$，第一项 $50$ 阶导为 $0$；第二项只有 $k=2$ 项非零：$-\frac{1}{2}\cdot C_{50}^2 \cdot 2 \cdot 2^{48} = -1225\cdot 2^{48}$。

B-8 $y = 2\ln|\varphi(\sin x)|$，$dy = \dfrac{2\varphi'(\sin x)\cos x}{\varphi(\sin x)}dx$。

B-9 令 $F(x) = x^n f(x)$。$F(0)=0$（因子），$F(1)=0$（$f(1)=0$），$F$ 连续可导，罗尔得 $\xi^{n-1}\left[nf(\xi)+\xi f'(\xi)\right]=0$，因 $\xi\neq 0$，故 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

B-10 取对数等价于 $\dfrac{\ln(a+x)}{a+x} < \dfrac{\ln a}{a}$。令 $g(t) = \dfrac{\ln t}{t}$，$g'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2} < 0$（$t>e$），而 $a+x > a > e$，故 $g(a+x) < g(a)$。

B-11 令 $R(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\right]$。则 $R(x_0)=R'(x_0)=R''(x_0)=0$，且 $R''(x) = f''(x) - f''(x_0) \to 0$（$x\to x_0$，$f''$ 在 $x_0$ 连续）。对 $\lim \frac{R(x)}{(x-x_0)^2}$ 连用两次洛必达得 $\lim \frac{R''(x)}{2} = 0$，故 $R = o((x-x_0)^2)$。

B-12 （Ⅰ）$x>0$ 时 $y' = x^2+y^2 > 0$，故 $y$ 严格增；$y'' = 2x + 2yy' = 2x + 2y(x^2+y^2) > 0$（$x>0$ 时 $y > y(0) = 0$），故曲线在 $(0,+\infty)$ 上凹（$f''>0$）。（Ⅱ）由 $y' > x^2$ 及 $y(0)=0$ 得 $y > \frac{x^3}{3}$，故 $\frac{y}{x^4} > \frac{1}{3x} \to +\infty$，即该极限为 $+\infty$（发散）。

# 模拟卷 C（2024–2025 第三套真题）

武汉大学 2024–2025 第一学期高等数学 A1 期中 · 10 题 × 10 分 · 120 分钟

## 一、求极限（每题 10 分）

1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)$

2 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导，且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{5}$，求 $L=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-\tan h)}{\sqrt{1+h}-1}$。

3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^{2}+n\right)^{1/n}$

## 二、导数与微分（每题 10 分）

4 已知 $y=f(x)$ 满足方程 $x+y+e^{2xy}=0$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的法线方程。

5 已知等角螺线的极坐标方程为 $\rho=e^{\theta}$，在 $\theta=0$ 附近该螺线在直角坐标系下可由函数 $y=y(x)$ 表示，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=0}$ 与 $\left.\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{\theta=0}$。

## 三、不定积分（每题 10 分）

6 求不定积分：（1）$\displaystyle\int\frac{dx}{(\arcsin x)^{2}\sqrt{1-x^{2}}}$；（2）$\displaystyle\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$。

7 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\cos x}{x}$，求不定积分 $\displaystyle\int x f'(x)dx$。

## 四、证明与讨论（每题 10 分）

8 设 $a>0,b>0$，证明：$ab-e^{a-1}\le b\ln b$。

9 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+x^{2}\sin\dfrac{1}{x^{3}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$。（1）求导函数 $f'(x)$；（2）问是否存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内单调递增？请阐述理由。

10 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\le f'(x)\le f(x)$，$f(0)=0$。证明：在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$。

C-1 通分后分子 $e^x-1-\ln(1+x)=x^2-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$，分母 $\sim x^2$，极限 $1$。

C-2 分子 $=f'(x_0)\,[2h+\tan h+o(h)]\sim 3f'(x_0)h$，分母 $\sim\dfrac{h}{2}$，故 $L=6f'(x_0)=\dfrac{6}{5}$。

C-3 $(n^2+n)^{1/n}=\exp\left[\frac{\ln(n^2+n)}{n}\right]\to e^0=1$。

C-4 两边求导：$1+y'+e^{2xy}\,(2y+2xy')=0$。代入 $x=0,y=-1$：$1+y'-2=0$，$y'=1$。法线斜率 $-1$，方程为 $y=-x-1$（即 $x+y+1=0$）。

C-5 $x=e^\theta\cos\theta$，$y=e^\theta\sin\theta$，$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$，$\theta=0$ 时为 $1$；$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{(\cos\theta-\sin\theta)^3e^\theta}$，$\theta=0$ 时为 $2$。

C-6 （1）$-\dfrac{1}{\arcsin x}+C$；（2）$x\tan\dfrac{x}{2}+C$。

C-7 $\int xf'(x)dx=xf(x)-\int f(x)dx$，而 $\int f=\frac{\cos x}{x}+C$，$f=\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，故结果为 $-\sin x-\dfrac{2\cos x}{x}+C$。

C-8 视 $b$ 为变量，令 $F(b)=b\ln b-ab+e^{a-1}$，$F'(b)=\ln b+1-a$，唯一驻点 $b=e^{a-1}$，$F''=\frac{1}{b}>0$，最小值 $F\left(e^{a-1}\right)=0$，故 $F(b)\geq 0$。

C-9 （1）$x\neq 0$ 时 $f'(x)=1+2x\sin\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^3}$；$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2\sin(1/x^3)}{x}=1$。（2）**不存在**。取 $x_k=(2k\pi)^{-1/3}$，则 $\cos\dfrac{1}{x_k^3}=1$，$f'(x_k)=1-\dfrac{3}{x_k^2}+o\left(\dfrac{1}{x_k^2}\right)<0$，即 $f'$ 在 $0$ 的任意右邻域内都取负值，故 $f$ 不可能在 $(-\delta,\delta)$ 内单调增。

C-10 由 $f'\geq 0$ 知 $f$ 单调不减，故 $f(x)\geq f(0)=0$。令 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则 $F'(x)=e^{-x}\,[f'(x)-f(x)]\leq 0$，$F$ 单调不增，故 $F(x)\leq F(0)=0$，即 $f(x)\leq 0$。结合 $f\geq 0$ 得 $f\equiv 0$。

---

**关于本资料。**考情统计与例题来自武汉大学 2020–2025 年高数 A1 期中 12 套公开试卷（含 22–23 试题 1/2/3、23–24 正卷与第二/三/四套、24–25 第二/三套），章节结构依据齐民友主编《高等数学（第二版）上册》（高教社，ISBN 978-7-04-051307-3）目录。第 4 章不定积分自 2024–2025 学年起进入期中范围，此前各卷未涉及，故该章按 24–25 两套卷的实际考法（纯计算：凑微分、分部、配方换元、三角有理式、原函数概念）准备即可。

**使用建议。**时间充裕：按 Section 1 → 2 → 5 顺序，每类模板配 3 道练习；只剩两天：只看 Section 0.2 频次表 + Section 2 的模板 + Section 4 检查清单，然后限时做 C 卷；只剩一晚：背 Section 1 的六张表和 Section 3 的 30 条。

公式中若出现显示异常，请用支持 MathJax 的浏览器打开 HTML 版；PDF 版为静态渲染，适合打印。