大 学 公 共 数 学 系 列 教 材

# 《高等数学》第二版 · 上册

第 1–3 章 精讲笔记：极限与连续 · 导数与微分 · 中值定理与导数的应用

武汉大学数学与统计学院 | 主编 齐民友 | 高等教育出版社 | ISBN 978-7-04-051307-3 | 2019 年 5 月 第 2 版 | 372 页 · 420 千字

这份笔记按该书的实际章节顺序整理，覆盖第 1–3 章的全部九节、五节、六节内容：定义与定理的准确表述、定理之间的依赖关系、每类题的标准解法、以及这本书区别于其他教材的几处"加厚"处理（数集的界与确界原理、归结原理、柯西收敛准则、一致连续性、费马定理作为中值定理体系的起点）。

---

CHAPTER 01

## 极限与连续

第 1–9 节 · 全书的语言基础：把"无限接近"翻译成不等式

整个上册只有一件事：**用代数手段研究函数**。而代数手段的入口是极限。这一章花九节的篇幅只为建立两样东西——一套可以写进证明里的精确语言（$\varepsilon$-$N$、$\varepsilon$-$\delta$），以及连续这个概念。后面第二章的导数是"差商的极限"，第五章的定积分是"和式的极限"，都只是这一章的两个特例。所以第一章学不扎实，后面全部是背公式。

**本章的骨架**

实数系（确界原理）→ 数列极限（$\varepsilon$-$N$）→ 函数极限（$\varepsilon$-$\delta$）→ 极限的性质与存在准则 → 无穷小（比较阶）→ 连续（极限等于函数值）→ 闭区间上连续函数的四大定理 → 一致连续（$\delta$ 与点无关）。

一句话概括这条链：极限是"趋向"的精确化，连续是"极限值等于函数值"的特殊情形，一致连续是把"逐点"升级为"整体"。

### 1.1 预备知识：集合、邻域、数集的界、映射与函数

这一节看似是复习，实际上埋了整章的地基。尤其是**数集的界**——多数教材把它略讲，这本书却专门列为一目，因为后面"单调有界准则"能不能成立，全靠它。

#### 邻域：极限语言的"量词积木"

设 $x_0 \in \mathbb{R}$，$\delta > 0$。称

$$U(x_0, \delta) = \{x : |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

为 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域；去掉中心点后称为**去心邻域** $U^\circ(x_0,\delta)=\{x:0<|x-x_0|<\delta\}$。

这个记号的价值在于：极限定义里的 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 就是"$f(x)$ 落在 $A$ 的 $\varepsilon$ 邻域内"，而 $0<|x-x_0|<\delta$ 就是"$x$ 在 $x_0$ 的去心 $\delta$ 邻域内"。所有 $\varepsilon$-$\delta$ 命题都可以用邻域语言重写一遍，写一遍就懂了。

### 数集的界：确界与确界原理

设 $S\subset\mathbb{R}$ 非空。若存在 $M$ 使一切 $x\in S$ 满足 $x\le M$，称 $S$ **有上界**，$M$ 为一个上界；上界中最小的那个称为**上确界**，记 $\sup S$。类似地有下界与**下确界** $\inf S$。

**定义（确界的刻画）**

$\beta=\sup S$ 当且仅当同时满足两条：

1. $\beta$ 是上界：对一切 $x\in S$，$x\le\beta$；
2. $\beta$ 是最小的上界：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in S$ 使 $x_0>\beta-\varepsilon$。

第 2 条是全部难点所在——它把"最小"翻译成了"再小一点就不再是上界"。证明确界问题，几乎总是拆成这两条来写。

**公理（确界原理）**

非空有上界的实数集必有上确界；非空有下界的实数集必有下确界。

这条原理是实数系**连续性**（完备性）的一种表述，有理数集不满足它（$\{q\in\mathbb{Q}:q^2<2\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中无上确界）。本书拿它当公理，再由它推出单调有界准则——这就是为什么第 1 节要专门讲"界"。

**易错**

$\sup S$ 不一定属于 $S$。例如 $S=\{1-1/n\}$，$\sup S=1\notin S$；$\inf S=0\notin S$。只有当 $S$ 的最大值存在时才有 $\sup S=\max S$。

### 函数：本书关注的四类性质

映射 $f:X\to Y$ 中当 $X,Y\subset\mathbb{R}$ 时即为函数。后面反复用到的是：**有界性、单调性、奇偶性、周期性**；以及复合 $f\circ g$ 与反函数 $f^{-1}$ 的构造条件（一一对应）。

要牢记五类基本初等函数及其定义域、值域、图像：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。由它们经有限次四则运算与复合得到的叫**初等函数**。第 7 节的核心结论之一就是：初等函数在其定义区间内连续。

## 1.2 数列极限：$\varepsilon$-$N$ 语言的第一次出现

数列 $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ 记作 $\{x_n\}$，本质是定义在正整数集上的函数 $x_n=f(n)$。**子列** $\{x_{n_k}\}$ 是取 $n_1<n_2<\cdots$ 得到的，注意 $n_k\ge k$，这条小性质在证明里常常是决定性的。

**定义（数列极限）**

若对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N$，使当 $n > N$ 时恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。不收敛的数列称为发散。

### 怎么读这个定义

三个量词，顺序不能换：**对任意 $\varepsilon$（挑战）→ 存在 $N$（回应）→ 对一切 $n > N$（持续成立）**。反过来读就是几何意义：

> 以 $a$ 为中心、$\varepsilon$ 为半径的"带状窗口"，无论多窄，数列从某一项之后全部落进去，窗口外最多只剩有限项。

"外面只有有限项"这句话是理解收敛的一把钥匙。它立刻给出两个推论：改变数列的有限项不影响极限；收敛数列必有界。

**例 1**

用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$。

**分析**：给 $\varepsilon$，要 $1/n^2 < \varepsilon$，即 $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$。于是取 $N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$（取整即可，甚至取 $1/\sqrt{\varepsilon}$ 也行，$N$ 不唯一）。

**证明**：任给 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$，则当 $n > N$ 时 $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$，故 $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$。证毕。

**$\varepsilon$-$N$ 证明的固定套路**

1. **倒推**：从 $|x_n - a| < \varepsilon$ 出发，解出 $n > g(\varepsilon)$；
2. **放大**：若解不出来，就把 $|x_n - a|$ 放大成一个更简单、且仍趋于 0 的量（如 $\frac{1}{n}$、$\frac{C}{n}$），再解；
3. **取 $N$**：$N = [g(\varepsilon)] + 1$，保证 $n > N \Rightarrow n > g(\varepsilon)$；
4. **正写**：按"任给一取一当一则"的顺序重述一遍。

放大时只能用"往大放"且放完仍趋于 0，绝不能在不等号方向或放大的合法性上出错（如 $n$ 在分母时想放大必须让分母变小）。

## 收敛数列的性质

**定理（四条基本性质）**

1. **唯一性**：极限若存在则唯一。
2. **有界性**：收敛数列必有界（反之不成立，如 $\{(-1)^n\}$）。
3. **保号性**：若 $\lim x_n = a > 0$，则存在 $N$，当 $n > N$ 时 $x_n > a/2 > 0$；一般地 $x_n$ 与 $a$ 同号（$a \neq 0$）。
4. **保序性**：若从某项起 $x_n \le y_n$，且两数列都收敛，则 $\lim x_n \le \lim y_n$。

保号性的标准证法是取 $\varepsilon = a/2$；保序性要用反证加保号性。注意保序性**不能**把 $\le$ 加强成 $<$：$x_n = 0 < y_n = 1/n$，极限却相等。

**定理（四则运算法则）**

若 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，则

$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b, \quad \lim(x_n y_n) = ab, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\ (b \neq 0).$$

证明乘积法则的关键技巧是"加减同一项"：

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \le |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a|,$$

再用"收敛必有界"把 $|x_n|$ 换成常数 $M$，最后取 $\varepsilon/(2M)$ 与 $\varepsilon/(2|b|)$ 中较小者。这个"拆项 + 有界化 + $\varepsilon/2$ 技巧"是分析证明的通用手法，后面证极限的乘积、导数的乘积法则都会重复出现。

## 判别定理：两个准则 + 子列

**定理（夹逼准则）**

若存在 $N_0$，当 $n > N_0$ 时 $y_n \le x_n \le z_n$，且 $\lim y_n = \lim z_n = a$，则 $\lim x_n = a$。

**定理（单调有界准则）**

单调递增且有上界的数列必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$；单调递减且有下界的数列必收敛，极限为 $\inf\{x_n\}$。

注意这里的"上确界"不是装饰：本书正是用确界原理来证明这条准则的——单调递增数列有上界，由确界原理存在 $a = \sup\{x_n\}$，再验证 $\lim x_n = a$。这就把第 1 节和第 2 节接上了。同济版通常直接承认这条准则，本书给出证明，是这个版本偏严谨的一个例证。

**例 2（第二个重要极限的数列版）**

证明 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 收敛。

**思路**：不必求出极限值，只要证"单调 + 有界"。用二项式展开

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right),$$

比较 $x_n$ 与 $x_{n+1}$ 的对应项：$x_{n+1}$ 多一项，且每一项的因子 $\left(1-\frac{j}{n+1}\right)>\left(1-\frac{j}{n}\right)$，故 $x_{n+1}>x_n$，单调递增。又有

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots<3,$$

有上界。由单调有界准则收敛，其极限记为 $e$。

**定理（子列与极限）**

1. 若 $\lim x_n=a$，则任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 $a$；
2. 若两个子列收敛于不同极限，则原数列发散；
3. 若奇数项子列与偶数项子列都收敛于同一 $a$，则原数列收敛于 $a$。

第 1 条是"必要条件"，常用来**证发散**：$\{(-1)^n\}$ 的奇子列趋于 $-1$、偶子列趋于 $1$，故发散。第 3 条是"充分条件"，用来**证收敛**，处理含 $(-1)^n$ 的数列时非常有效。

## 1.3 函数极限：六种趋向方式

数列只有一种"趋向"（$n\to+\infty$），函数有六种：$x\to\infty$、$x\to+\infty$、$x\to-\infty$、$x\to x_0$、$x\to x_0^+$、$x\to x_0^-$。定义只是把 $\varepsilon$-$N$ 里的"$n>N$"换成"$|x|>X$"或"$0<|x-x_0|<\delta$"，结构完全一样。

**定义 1（$x\to\infty$）**

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使当 $|x|>X$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则记 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

**定义 2（$x\to x_0$）**

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则记 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

**三个必须说清的细节**

- **为什么是去心邻域 $0<|x-x_0|$?** 因为极限只关心 $x_0$ 附近的行为，与 $f$ 在 $x_0$ 处是否有定义、取什么值完全无关。$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 而函数在 $0$ 处无定义，正是这个道理。
- **$x\to\infty$ 是双侧的**，同时包含 $+\infty$ 与 $-\infty$ 两侧；$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。$\arctan x$ 就是典型反例：两侧极限分别是 $\pm\pi/2$，故 $x\to\infty$ 时极限不存在。
- **单侧极限**：$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 只要求 $x_0<x<x_0+\delta$。分段函数在分界点、含根号或绝对值的函数，必须分侧讨论。

**定理（极限存在的充要条件）**

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\iff$ $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 都存在且相等。

这是判断分段函数、$e^{1/x}$、$\arctan(1/x)$、$\dfrac{|x|}{x}$ 这类函数在特殊点极限的标准工具。比如 $f(x)=e^{1/x}$ 在 $x\to 0$ 时，左极限为 $0$、右极限为 $+\infty$，故极限不存在。

**例 3**

设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ a+x^2, & x\le 0\end{cases}$，问 $a$ 取何值时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在。

**解**：右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$（无穷小乘有界量）；左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$。故 $a=0$ 时极限存在，且为 $0$。

## 1.4 函数极限的性质与运算法则

与数列极限的四条性质一一对应，但都带"局部"二字——因为函数极限只约束 $x_0$ 附近：

**定理（局部性质）**

1. **唯一性**：极限存在则唯一。
2. **局部有界性**：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在 $\delta>0$，使 $f$ 在 $U^\circ(x_0,\delta)$ 内有界。
3. **局部保号性**：若 $A>0$，则存在 $\delta>0$，在该去心邻域内 $f(x)>A/2>0$。
4. **局部保序性**：若在 $x_0$ 的某去心邻域内 $f(x)\le g(x)$，且两者极限存在，则 $\lim f\le\lim g$。

"局部"两个字的分量：局部有界不等于有界。$f(x)=1/x$ 在 $x=1$ 附近有界，在整个定义域上无界。写证明时务必把 $\delta$ 的范围说清楚，这是第一章最常见的失分点。

**定理（四则运算与复合）**

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则和、差、积、商（$B\neq 0$）的极限分别为 $A\pm B$、$AB$、$A/B$。

复合运算法则：若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，且 $f$ 在 $u_0$ 处**连续**，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(u_0)$。注意连续性这个条件不能丢。

**做题时真正在用的三个工具**

1. **代入法**：初等函数在定义点处直接代入（依据是连续性）。这是 90% 的极限题的第一步。
2. **消去零因子**：$\frac{0}{0}$ 型先因式分解或有理化，如 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$。
3. **除以最高次幂**：$x\to\infty$ 的有理式，分子分母同除最高次幂，立刻看出结果与次数关系。

## 1.5 函数极限存在的条件：归结原理、两个重要极限、柯西准则

这一节是三块内容，但地位不同：**归结原理**是"数列与函数之间的翻译器"，**两个重要极限**是计算的核心工具，**柯西准则**是理论上的完备性判据。

**定理（归结原理 / Heine 定理）**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：对任意满足 $x_n\to x_0$（$x_n\neq x_0$）的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

它的实际用途几乎只有一个，但极其重要——**证明极限不存在**：只要找到两个都趋于 $x_0$ 的数列，使 $f(x_n)$ 趋于不同的值（或发散），极限就不存在。

**例 4**

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

**证**：取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$，则 $\sin\frac{1}{x_n}=\sin 2n\pi=0\to 0$；取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}\to 0$，则 $\sin\frac{1}{y_n}=1\to 1$。两子列极限不同，由归结原理，原极限不存在。

同一手法可证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$、$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在。它把"函数极限不存在"这种否定性命题，转化成"构造两个数列"这种建设性操作，这是本书引入归结原理的最大收益。

**定理（夹逼准则，函数版）**

若在 $x_0$ 的某去心邻域内 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

**两个重要极限**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

第二个极限也常写成等价的 $x\to 0$ 形式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$。

**第一个**的证明靠单位圆中的面积不等式 $\sin x<x<\tan x$（$0<x<\pi/2$），再夹逼；它之所以重要，是因为它是全部三角函数的导数公式的源头。**第二个**的证明用单调有界准则（见例 2），它定义了 $e$，也是指数函数求导的基础。

**例 5（两类标准变形）**

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$。

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x}\right)^{-x/2}\right]^{-6}=e^{-6}$。

(3) 的做法叫"凑型"：把括号内配成 $(1+u)$，指数配成 $1/u$，多退少补，这是第二重要极限题的唯一套路。

**定理（柯西收敛准则）**

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\iff$ 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对任意 $x',x''\in U^\circ(x_0,\delta)$，都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

它不预设极限值是多少，只检查"函数值彼此是否越靠越近"，因此是判断收敛性（而非求值）的利器。数列版同理：$\{x_n\}$ 收敛 $\iff$ 对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $N$，当 $m,n>N$ 时 $|x_m-x_n|<\varepsilon$。这条准则在实数系中成立、在有理数系中不成立，又一次体现完备性。

## 1.6 无穷小与无穷大：极限的"零语言"

**定义**

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的**无穷小**。

**核心定理**：$\lim f(x)=A\iff f(x)-A$ 是无穷小。于是"求极限"永远可以改写成"把函数拆成常数加无穷小"，这是极限证明的基本范式。

无穷小的三条运算性质必须记牢：

- 有限个无穷小之和仍是无穷小；
- **有界函数与无穷小之积是无穷小**（例 3 就用了这条）；
- 有限个无穷小之积是无穷小。

注意"有限个"不能改成"无限个"，$n$ 个 $\frac{1}{n}$ 相加等于 $1$，不是无穷小。

**定义（无穷大）**

对任意 $M>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大，记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$。

**无穷大 ≠ 无界**

**无穷大必无界，无界未必无穷大**。反例：$f(x)=x\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时无界（取 $x=2n\pi+\pi/2$ 得值 $x$ 任意大），但不趋于无穷（取 $x=2n\pi$ 得值 $0$）。区别在于：无穷大要求"从某时刻起全部很大"，无界只要求"存在某些点很大"。

另一条常用关系：在同一极限过程中，$f$ 为无穷大 $\iff$ $1/f$ 为无穷小（$f\neq 0$）。

### 无穷小的比较：给"趋于 0 的快慢"排序

设 $\alpha,\beta$ 都是同一过程中的无穷小，且 $\beta\neq 0$，考察 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$：

| 极限值 | 关系 | 记法 | 含义 |
|---|---|---|---|
| $0$ | $\alpha$ 是 $\beta$ 的高阶无穷小 | $\alpha=o(\beta)$ | $\alpha$ 趋零更快 |
| $\infty$ | $\alpha$ 是 $\beta$ 的低阶无穷小 | — | $\alpha$ 趋零更慢 |
| $c\neq 0$ | 同阶无穷小 | $\alpha=O(\beta)$ | 速度相当 |
| $1$ | **等价无穷小** | $\alpha\sim\beta$ | 速度完全一致 |
| $c\neq 0,k>0$ | $\alpha$ 是 $\beta$ 的 $k$ 阶无穷小 | — | $\alpha\sim c\beta^k$ |

最常用的等价无穷小（$x\to 0$）：

$$\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$$

**定理（等价替换）**

若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$。

**替换的边界：只在乘除因子中可换**

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$，若把 $\tan x$、$\sin x$ 都换成 $x$，得 $0$，**错误**。正确做法是提出公因子：

$$\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2} \implies \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

原则：替换针对**整个分子或分母的乘积因子**；加减法中被替换的量若不能保证"主部相消后仍正确"，就会丢阶。安全做法是先因式分解、把加减变成乘除，再替换。

## 1.7 函数的连续性与间断点

**定义（在一点连续）**

设 $f$ 在 $x_0$ 的某邻域内有定义。若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f$ 在 $x_0$ 处连续。等价写法：$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$，其中 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$。

这个等式**同时要求三件事**，缺一不可：$f(x_0)$ 存在（有定义）、$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在、两者相等。判断连续性时，最容易漏掉第一件。

相应地有**左连续** $f(x_0^-) = f(x_0)$ 与**右连续** $f(x_0^+) = f(x_0)$；$f$ 在 $x_0$ 连续 $\iff$ 左、右都连续。若 $f$ 在开区间内每点连续、在端点处单侧连续，就说 $f$ 在该区间上连续。

**定理（间断点的分类）**

若 $f$ 在 $x_0$ 处不连续，称 $x_0$ 为间断点。按左右极限的存在情况分两类：

| 类型 | 特征 | 细分 |
| --- | --- | --- |
| **第一类** | 左右极限 $f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 都存在（有限） | **可去间断点**：两者相等但 $\neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义；<br>**跳跃间断点**：两者不相等 |
| **第二类** | 左右极限至少有一个不存在 | **无穷间断点**（如 $1/x$ 在 $0$）；<br>**振荡间断点**（如 $\sin(1/x)$ 在 $0$） |

"可去"这个名字的含义是可修补：重新定义 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，就变成连续函数。$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处是可去间断点（无定义但极限为 1），$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处同样是可去间断点。

**例 6**

求 $f(x)=\dfrac{x}{1-e^{x/(x-1)}}$ 的间断点并分类。

**解**：可疑点为 $x=1$（分母指数无定义处）与 $x=0$（$1-e^{\cdot}=0$ 处）。

$x=1$：$x\to1^+$ 时 $\frac{x}{x-1}\to+\infty$，$e^{\cdot}\to+\infty$，$f\to0$；$x\to1^-$ 时 $\frac{x}{x-1}\to-\infty$，$e^{\cdot}\to0$，$f\to1$。左右极限不等，为**跳跃间断点**。

$x=0$：$\frac{x}{x-1}\to0$，$1-e^{\cdot}\sim-\frac{x}{x-1}\sim x$，故 $f\sim\frac{x}{x}=1$，极限存在为 $1$，是可去间断点（无定义）。

**定理（连续函数的运算与初等函数的连续性）**

1. 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍连续；
2. 连续函数的复合仍连续；连续且严格单调函数的反函数连续；
3. **一切初等函数在其定义区间内都连续。**

第 3 条是计算上的"许可证"：只要点落在定义区间内，求极限就能直接代入。而定义区间之外（如分段点、无定义点），代人的做法立刻失效，必须回到定义或单侧极限。求极限时第一步永远是"看能不能直接代入"，就是这个道理。

## 1.8 闭区间上连续函数的性质：四大定理

这一节的四个结论都建立在"闭区间 + 连续"这两个条件上，缺一不可，而且都可以用几何直观理解。它们是从"局部"跳到"整体"的第一批定理。

**定理 1（有界性与最值定理）**

若 $f \in C[a,b]$，则 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界，且必能取到最小值 $m$ 与最大值 $M$：存在 $\xi, \eta \in [a,b]$ 使 $f(\xi)=m$，$f(\eta)=M$。

**定理 2（零点定理）**

若 $f \in C[a,b]$，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $f(\xi)=0$。

**定理 3（介值定理）**

若 $f \in C[a,b]$，$m \le \mu \le M$，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使 $f(\xi)=\mu$。换言之，闭区间上连续函数的值域是区间 $[m,M]$。

顺序是：最值定理 → 介值定理 → 零点定理（零点定理是 $\mu=0$ 的特例，或由介值定理直接得出）。

**条件为什么不能去掉**

$f(x)=1/x$ 在 $(0,1)$ 上连续但无界——开区间不行。$f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 上连续但取不到最值——开区间不行。$f(x)=1/x$ 在 $[-1,1]$ 上有 $f(-1)<0<f(1)$ 却在区间内无零点，因为有间断点——不连续不行。**考试中凡是用零点定理证根的存在性，必须先写"$f$ 在 $[a,b]$ 上连续"**。

**例 7（零点定理的典型用法）**

证明方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根。

**证**：令 $f(x)=x-\cos x$，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续。$f(0)=-1<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$。由零点定理，存在 $\xi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使 $f(\xi)=0$，即 $\xi=\cos\xi$。

证"至少有一个根"用零点定理；若要证"**恰有**一个根"，还需加上单调性（$f'$ 不变号）或严格单调的论证。这一步是很多解答题的第二问。

## 1.9 一致连续性：$\delta$ 与点无关

这是本书第一章最有"分析味"的一节，也是与其他教材差别最大的地方之一。先对比两个定义：

**定义（连续 vs 一致连续）**

**连续**：对每个 $x_0 \in I$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$，使当 $|x - x_0| < \delta$（$x \in I$）时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。$\delta$ 依赖 $\varepsilon$ 和 $x_0$。

**一致连续**：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使对**任意** $x_1, x_2 \in I$，只要 $|x_1 - x_2| < \delta$，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$。$\delta$ 只依赖 $\varepsilon$。

区别全在量词顺序上：连续是"先给点、再给 $\delta$"，$\delta$ 可以因点而异；一致连续是"先给 $\delta$、再任取点"，同一个 $\delta$ 必须管住整条区间上的所有点对。直观地说，一致连续要求函数图像"**不能越往某处越陡**"。

**定理（康托尔定理）**

若 $f \in C[a, b]$，则 $f$ 在 $[a, b]$ 上一致连续。

这条定理把"闭区间 + 连续"的威力又推进一层，证明用有限覆盖定理或反证法（取 $x_n, y_n$ 使 $|x_n - y_n| < 1/n$ 而 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$，再用致密性定理取收敛子列导出矛盾）。

**如何证明不一致连续**

只需找到两列点 $x_n, y_n \in I$，使

$$|x_n - y_n| \to 0, \qquad \text{while} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

三个经典反例：

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$：取 $x_n = \frac{1}{n}$，$y_n = \frac{1}{n+1}$，则 $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$。
- $f(x) = x^2$ 在 $\mathbb{R}$（或无界区间）：取 $x_n = n$，$y_n = n + \frac{1}{n}$，差为 $2 + \frac{1}{n^2}$。
- $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$：在振荡处取点即可。

共同点：区间不是闭的、或函数在端点附近"越来越陡/越来越快"。这也解释了康托尔定理为什么要闭区间。

**定理（开区间上一致连续的判据）**

$f$ 在 $(a, b)$ 上连续且一致连续 $\iff$ $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 都存在（有限）。此时可把 $f$ 连续延拓到 $[a, b]$。

这条判据非常好用：判断 $f$ 在开区间上是否一致连续，只需看两个端点的单侧极限是否有限。$\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上 $f(0^+) = +\infty$，故不一致连续；$\sin x$ 在任何区间上都一致连续（$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$，取 $\delta = \varepsilon$ 即可）。

**本章小结：五条主线**

1. **语言**：$\varepsilon$-$N$ / $\varepsilon$-$\delta$ 是把"无限接近"写成不等式的唯一方式，量词顺序不可交换。
2. **结构**：确界原理 → 单调有界准则 → 两个重要极限 → 初等函数的连续性，是一条完整的依赖链。
3. **工具**：夹逼、等价无穷小、四则运算、归结原理（证不存在）、零点定理（证有根）。
4. **连续**：三要素齐备才算连续；间断点按左右极限分类；闭区间上连续 → 有界、有最值、可取中间值、一致连续。
5. **易错**：局部与整体的区别、无穷大与无界的区别、等价替换只能用于乘除因子、开区间不能随便用最值定理。

CHAPTER 02

# 导数与微分

第 1–5 节 · 从"变化率"到"线性主部"：两个概念，一套算法

第一章把极限的语言建好了，第二章立刻用它做第一件大事：定义导数。这一章的内容可以拆成"两个概念 + 一套算法"——导数（瞬时变化率）与微分（增量的线性主部）是两个概念，求导法则、隐函数求导、高阶导数、微分公式是同一套算法的不同外壳。

**一句话抓住本章**

导数衡量"变化的快慢"，微分衡量"变化的多少（线性部分）"。二者通过 $dy = f'(x)\,dx$ 相连：导数是一个数（或函数），微分是一个线性映射。搞清这个区别，2.5 节就不会和 2.1 节混淆。

## 2.1 导数的概念

### 两个引例 → 同一个数学模型

**瞬时速度**：$s = s(t)$，$[t_0, t_0 + \Delta t]$ 上的平均速度为 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$，令 $\Delta t \to 0$ 得瞬时速度 $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$。

**切线斜率**：曲线 $y=f(x)$ 上过 $P(x_0,f(x_0))$ 与 $Q(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 的割线斜率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，令 $Q\to P$ 得切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$。

一个是物理量、一个是几何量，数学结构完全相同：**差商的极限**。这就是导数的本质。

**定义（导数）**

设 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内有定义，若极限

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f$ 在 $x_0$ 处**可导**，该极限值为 $f$ 在 $x_0$ 处的导数。也记作 $y'\big|_{x=x_0}$、$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$。

等价的两种写法（做题时常换用）：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

### 左导数与右导数

把 $\Delta x\to 0$ 换成 $\Delta x\to 0^-$ 或 $0^+$，得 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$。与极限的充要条件同理：

**定理**

$f$ 在 $x_0$ 可导 $\iff$ $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等。此时 $f'(x_0)$ 等于这个公共值。

分段函数在分界点处是否可导，**必须用左右导数分别计算**，这是本章第一个高频失分点。

**例 1（可导性的标准判断）**

设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 $f$ 在 $x=0$ 处的可导性。

**解**：按定义

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

故 $f$ 在 $0$ 处可导且 $f'(0)=0$。注意此时 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$（$x\neq 0$），当 $x\to 0$ 时**并不趋于 $0$**——即 $f'$ 在 $0$ 处不连续。这说明"$f$ 在一点可导"与"$f'$ 在该点连续"是两件事。

**定理（可导与连续的关系）**

$f$ 在 $x_0$ 可导 $\Rightarrow f$ 在 $x_0$ 连续；反之不成立。

证明只需注意 $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x \to f'(x_0)\cdot 0 = 0$。反例是 $f(x)=|x|$ 在 $0$ 处：连续，但 $f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1$，不可导。几何上是"尖点"：有切线但切线不唯一（或说切线趋于两条不同直线）。

由此得到判断可导性的常用思路：先看是否连续（不连续必不可导），再看左右导数是否相等（分段点、尖点、垂直切线处是常见失效点，如 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $0$ 处导数为无穷）。

### 几何意义与切线方程

$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。**切线方程**：

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

**法线方程**（$f'(x_0)\neq 0$ 时）：$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。若 $f'(x_0)=0$，法线为竖直线 $x = x_0$。

### 导函数

若 $f$ 在区间 $I$ 内每点可导，则 $x \mapsto f'(x)$ 是 $I$ 上的函数，称**导函数**。求导公式都是对导函数而言的。$f'(x_0)$ 是导函数在 $x_0$ 的值——但要注意，$f'$ 在 $x_0$ 处的值必须由定义算，不能先求 $x\neq x_0$ 时的 $f'$ 再代 $x_0$（例 1 就是反例）。

## 2.2 函数的求导法则

**定理（四则运算）**

设 $u=u(x)$、$v=v(x)$ 可导，则

$$(u\pm v)' = u'\pm v', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v\neq 0).$$

乘积法则的证明正是第一章"拆项 + $\varepsilon/2$"手法的翻版：

$$\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u\,v' + v\,u'.$$

记忆口诀："前导后不导，加，前不导后导"。三个因子相乘则轮换三项。商的法则不要与乘积混淆，检查办法：取 $u=1$ 应得 $-\frac{v'}{v^2}$。

**定理（反函数求导）**

若 $y=f(x)$ 在区间内严格单调、可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 可导，且

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\iff [f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)}$$

它把 $\arcsin$、$\arctan$、$\ln x$ 的导数一次算清：由 $y=\arctan x\iff x=\tan y$，得 $y'=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$。

**定理（复合函数求导 / 链式法则）**

若 $u=g(x)$ 在 $x$ 可导，$y=f(u)$ 在 $u=g(x)$ 可导，则 $y=f(g(x))$ 在 $x$ 可导，且

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

链式法则是整本章最重要的工具，原因很简单：**初等函数几乎都是复合的**。多层复合就一路乘下去：

$$[f(g(h(x)))]'=f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

实际做题时要养成"由外向内、逐层剥"的习惯：先认清最外层是什么函数（$\sin$、$\ln$、幂），把它整体看作 $u$；再对 $u$ 求导，$u$ 里面继续剥。漏掉最内层因子（如 $(\sin x^2)'=2x\cos x^2$ 里漏掉 $2x$ 之外还要再乘 $\cos$ 的链）是初学者最常犯的错。

**例 2（三个易错组合）**

(1) $y=\ln\sin(2x)$：$y'=\dfrac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2=2\cot 2x$。

(2) $y=\sqrt{1+x^2}$：$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。

(3) **幂指函数** $y=x^x$（$x>0$）：底数与指数都含 $x$，既不能当幂函数也不能当指数函数。用**对数求导法**：取对数 $\ln y=x\ln x$，两边对 $x$ 求导得 $\frac{y'}{y}=\ln x+1$，故

$$y'=x^x(\ln x+1).$$

也可写成 $y=e^{x\ln x}$ 再用链式法则，结果相同。

**基本导数表（必须默写）**

| 函数 | 导数 | 函数 | 导数 |
|---|---|---|---|
| $C$ | $0$ | $x^{\alpha}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $a^{x}$ | $a^{x}\ln a$ | $e^{x}$ | $e^{x}$ |
| $\log_{a}x$ | $\dfrac{1}{x\ln a}$ | $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\sec^{2}x$ | $\cot x$ | $-\csc^{2}x$ |
| $\sec x$ | $\sec x\tan x$ | $\csc x$ | $-\csc x\cot x$ |
| $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ | $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ |
| $\arctan x$ | $\dfrac{1}{1+x^{2}}$ | $\operatorname{arccot}x$ | $-\dfrac{1}{1+x^{2}}$ |

表的下半部分（反三角）在积分里会反过来用，必须熟到"看见 $\frac{1}{1+x^{2}}$ 就想到 $\arctan$"。

## 2.3 隐函数的导数、参数方程的导数、相关变化率

### 隐函数求导

方程 $F(x,y)=0$ 在某个范围内确定了 $y=y(x)$（未必能解出显式），此时把 $y$ 看作 $x$ 的函数，**方程两边同时对 $x$ 求导**，凡遇到 $y$ 就用链式法则多乘一个 $y'$，然后解出 $y'$。

> **例 3**
>
> 求由 $x^{2}+y^{2}=1$ 确定的 $y=y(x)$ 的 $y'$ 与 $y''$。
>
> **解**：两边对 $x$ 求导：$2x+2yy'=0\Rightarrow y'=-\dfrac{x}{y}$。
>
> 再对 $x$ 求导（注意 $y$ 是 $x$ 的函数）：$1+(y')^{2}+yy''=0$，故
>
> $$y''=-\frac{1+(y')^{2}}{y}=-\frac{1+x^{2}/y^{2}}{y}=-\frac{y^{2}+x^{2}}{y^{3}}=-\frac{1}{y^{3}}.$$
>
> 关键点：求二阶导时，把 $y'$ 的结果**代回去**，最终只含 $x,y$，不能残留 $y'$。

### 参数方程求导

设 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$\varphi,\psi$ 可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

**二阶导最易错的一步**

不能写成 $\dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$。二阶导是"对 $x$ 求导"，而 $\frac{dy}{dx}$ 是 $t$ 的函数，所以必须再除以一次 $\varphi'(t)=\frac{dx}{dt}$。口诀：**每一阶都要"除以 $x'(t)$"作为换算因子**。

### 相关变化率

若两个量 $x,y$ 都随时间 $t$ 变化且满足某方程，则对该方程两边关于 $t$ 求导，得到 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 的关系，已知其一可求另一。典型题：气球半径以 $2\,\text{cm/s}$ 增长，求体积增长率（$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$）。

## 2.4 高阶导数

$y'=f'(x)$ 仍是函数，再求导得二阶导 $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$，如此可得 $n$ 阶导 $y^{(n)}$。二阶导的物理意义是加速度，几何意义是曲线的**凹凸性**（第 3 章 3.5 节要用）。

**定理（莱布尼茨公式）**

若 $u,v$ 都有 $n$ 阶导数，则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

结构与二项式定理完全一致，用来处理"多项式 × 指数/三角"这类乘积：因为多项式求导若干次后变零，求和实际只有少数几项。例如 $(x^2e^x)^{(20)}=e^x\left[x^2+40x+380\right]$。

**常用 $n$ 阶导数（记结论）**

| 函数 | $n$ 阶导数 |
|---|---|
| $e^{ax}$ | $a^n e^{ax}$ |
| $\sin x$ | $\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ |
| $\cos x$ | $\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ |
| $\ln(1+x)$ | $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ |
| $\dfrac{1}{1+x}$ | $\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ |

这些结论在 3.2 节的泰勒展开里会立刻用到——展开系数就是 $f^{(n)}(0)/n!$。

## 2.5 微分

导数回答"变化多快"，微分回答"变化多少（的一阶近似）"。设 $y=f(x)$ 在 $x$ 可导，给增量 $\Delta x$，则

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

右边第一项是 $\Delta x$ 的**线性部分**，第二项是高阶无穷小。这个线性部分就定义为微分。

**定义（微分）**

若 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$（$A$ 与 $\Delta x$ 无关），称 $f$ 在 $x$ 处**可微**，并称 $A\Delta x$ 为 $f$ 在 $x$ 处的**微分**，记 $dy = A\Delta x$。

**定理（可微 ⇔ 可导）**

一元函数 $f$ 在 $x$ 可微 $\iff$ $f$ 在 $x$ 可导，且此时 $A=f'(x)$，即

$$dy = f'(x)\,dx, \qquad dx = \Delta x.$$

所以一元函数"可导"与"可微"是等价的（多元函数里二者不再等价，这是下册的内容）。把 $dx$ 看作自变量的增量（等于 $\Delta x$），$dy$ 就是因变量增量的线性主部。

### 几何意义：以直代曲

$dy$ 是切线上纵坐标的增量，$\Delta y$ 是曲线上纵坐标的增量，二者之差 $o(\Delta x)$ 就是"曲线偏离切线的量"。**微分就是局部线性化**：在很小的范围内，曲线可以用它的切线代替。这个思想在数值计算、误差估计、牛顿迭代法里反复出现。

### 微分公式与形式不变性

由 $dy = f'(x)dx$，每个求导公式都对应一个微分公式，如 $d(\sin x) = \cos x\,dx$，$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$。微分的四则法则：

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

**一阶微分形式不变性**

无论 $u$ 是自变量还是中间变量，都有 $dy = f'(u)\,du$。这使复合函数的微分计算与求导一样可以"层层剥"。

这条性质在做**凑微分**时极其关键：$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x)$，正是把 $d(2x) = 2dx$ 反过来用。第 4 章的换元积分法就建立在这上面。

### 近似计算

当 $|\Delta x|$ 很小时，$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$。于是

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \qquad \sin x \approx x, \qquad e^x \approx 1 + x, \qquad \ln(1+x) \approx x$$

这些近似都要求 $|x|$ 充分小，误差是 $o(x)$ 量级。

这四条正是 $x \to 0$ 时的等价无穷小，本质上就是"一阶泰勒展开"，第 3 章 3.2 节会把它们推广到任意阶。

**例 4**

求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值。

**解**：取 $f(x) = \sqrt[3]{x}$，$x_0 = 1$，$\Delta x = 0.02$。$f'(1) = \frac{1}{3}$，故

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1 + \frac{1}{3} \times 0.02 \approx 1.0067.$$

（真值 $1.006622\ldots$，误差约 $10^{-5}$ 量级。）

**本章小结：一张关系图**

1. **导数** = 差商的极限 = 瞬时变化率 = 切线斜率；可导必连续，连续不一定可导。
2. **求导** = 四则法则 + 反函数法则 + 链式法则；隐函数与参数方程只是链式法则的变装。
3. **微分** = 增量的线性主部 = $f'(x)dx$；一元情形与可导等价；核心思想是"以直代曲"。
4. **高阶导数** = 对导函数再求导；莱布尼茨公式处理乘积；常用 $n$ 阶导要背。
5. **三条主线通向第 3 章**：$f'$ 的符号 → 单调性；$f''$ 的符号 → 凹凸性；$f'$ 的零点 → 极值。

CHAPTER 03

# 中值定理与导数的应用

第 1–6 节 · 全书第一次"用导数反推函数"

第二章把函数变成了导数，第三章做反方向的事：**用导数的信息重建函数的信息**。这条路的技术核心是中值定理——它把"某一点的导数"和"两点间的函数值之差"联系起来，于是局部的导数信息才能推出整体的单调性、极值、凹凸性、曲率。没有中值定理，导数就只是一堆算出来的数字。

**本章的推理链**

费马定理（极值点导数为零）→ 罗尔定理（两端相等必有水平切线）→ 拉格朗日定理（任意两点间存在平行于弦的切线）→ 柯西定理（两个函数之比）→ 洛必达法则（比值的极限）与泰勒公式（高阶逼近）。

后面三节（单调极值、凹凸作图、曲率）都是这条链的下游产品。

## 3.1 微分中值定理

### 费马定理：链条的第一环

**定理（费马 Fermat）**

若 $f$ 在 $x_0$ 的某邻域内有定义，在 $x_0$ 处**取到极值**，且 $f$ 在 $x_0$ 处可导，则

$$f'(x_0) = 0.$$

**证明思路**（这段值得自己推一遍）：不妨设 $x_0$ 为极大值点。则当 $\Delta x > 0$ 时 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le 0$，令 $\Delta x \to 0^+$ 得 $f'_+(x_0) \le 0$；当 $\Delta x < 0$ 时该差商 $\ge 0$，令 $\Delta x \to 0^-$ 得 $f'_-(x_0) \ge 0$。可导保证左右导数相等，故只能 $f'(x_0) = 0$。

**三个条件一个都不能少**

$f(x) = |x|$ 在 $0$ 处取极小值但不可导，$f'(0)$ 不存在；$f(x) = x$ 在 $[0,1]$ 上端点取到最值但端点不是"内点"，$f' \equiv 1 \neq 0$。**费马定理只对内点、且可导的极值点成立**。反过来也不成立：$f'(x_0) = 0$ 不代表 $x_0$ 是极值点（$y = x^3$ 在 $0$ 处）。

### 罗尔定理

**定理（罗尔 Rolle）**

若 $f$ 满足：(1) 在 $[a,b]$ 上连续；(2) 在 $(a,b)$ 内可导；(3) $f(a) = f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使

$$f'(\xi) = 0.$$

证明只用两句话：由闭区间连续函数的最值定理，$f$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 $M$ 与最小值 $m$。若 $M = m$，$f$ 恒为常数，任取 $\xi$ 即可；若 $M > m$，因 $f(a) = f(b)$，最大值与最小值中至少有一个在**内部**取到，该点就是极值点，由费马定理导数为零。

三条条件的角色很清楚：连续保证最值存在，可导保证费马定理可用，端点相等保证极值点落在内部。**罗尔定理的结论是"存在性"，它不告诉你 $\xi$ 在哪，也不需要知道**——这是中值定理类命题的共同特征。

## 拉格朗日中值定理

**定理（拉格朗日 Lagrange）**

若 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续、在 $(a,b)$ 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\qquad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

几何意义：曲线上至少有一点的切线平行于连接两端的弦。它是罗尔的推广（$f(a)=f(b)$ 时右边为零，退化为罗尔）。

**证明的标准手法——构造辅助函数**：令

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，对 $\varphi$ 用罗尔定理即得。这个"减去弦对应的直线"的技巧是所有中值定理证明的模板：要证的等式，往往就是某个辅助函数的罗尔定理结论。

**推论（三个高频结论）**

1. 若在区间 $I$ 上 $f'(x)\equiv 0$，则 $f$ 在 $I$ 上为常数。
2. 若在 $I$ 上 $f'(x)\equiv g'(x)$，则 $f(x)=g(x)+C$。
3. 若 $f'$ 在 $I$ 上恒正（恒负），则 $f$ 在 $I$ 上严格单调递增（递减）。

推论 1 看似 trivial，其实是**证明恒等式**的利器：要证 $f(x)=C$，只需证 $f'\equiv 0$ 再代一个特殊值。例如证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$：左边导数恒为 0，取 $x=0$ 得 $\frac{\pi}{2}$。

**例 1（用拉格朗日证不等式）**

证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

**证**：设 $f(t)=\ln(1+t)$，在 $[0,x]$ 上用拉格朗日定理，存在 $\xi\in(0,x)$ 使

$$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}\,x.$$

因 $0<\xi<x$，有 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$，两边乘 $x>0$ 即得结论。

这类题的套路：**把不等式整理成"两个函数值之差"的形式，对合适的函数用中值定理，再对 $\xi$ 的取值范围放缩**。

**柯西中值定理**

**定理（柯西 Cauchy）**

若 $f, g$ 在 $[a,b]$ 上连续、在 $(a,b)$ 内可导，且 $g'(x) \neq 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

它是拉格朗日的推广（取 $g(x)=x$ 即退化）。辅助函数为

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

柯西定理的直接用途是证明洛必达法则；在题目里，当出现**两个函数增量之比**时就要想到它。

**中值定理证明题的辅助函数构造法**

要证 $\exists \xi$ 使某含 $f(\xi), f'(\xi), f''(\xi)$ 的等式成立，通用思路是"**把 $\xi$ 换成 $x$，把等式整理成一个函数的导数等于零**"：

- 要证 $f'(\xi)+f(\xi)=0$：凑 $(e^x f(x))' = e^x[f'+f]$，取 $F = e^x f$。
- 要证 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$：凑 $(xf(x))'$。
- 要证 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}$：凑 $\left(\dfrac{f}{x}\right)'$。
- 要证 $f'(\xi)+kf(\xi)=0$：凑 $\left(e^{kx}f(x)\right)'$。

记住这个"乘以 $e^{\int k\,dx}$"的模式，大部分构造题都能拆开。

## 3.2 泰勒公式：用多项式模仿函数

拉格朗日定理给的是"一阶近似"：$f(x) \approx f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$。泰勒公式把它推到任意阶：用一个 $n$ 次多项式去逼近 $f$，并给出误差的精确形式。本书把泰勒公式放在洛必达法则之前，是为了后面用泰勒求极限、判极值都更方便。

**定理（泰勒公式，带佩亚诺余项）**

若 $f$ 在 $x_0$ 处有 $n$ 阶导数，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \quad (x \to x_0).$$

这种形式只描述 $x_0$ 附近的**局部**行为，适合求极限。

**定理（泰勒公式，带拉格朗日余项）**

若 $f$ 在含 $x_0$ 的区间上有 $n+1$ 阶导数，则对区间内任意 $x$，存在 $\xi$ 介于 $x_0$ 与 $x$ 之间，使

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这种形式给出**整体**的误差界，适合近似计算与证明不等式。

$x_0=0$ 时称**麦克劳林公式**。五个必背展开（$x\to 0$）：

$$\begin{aligned}
e^x&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})\\
\cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})\\
\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\\
(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+o(x^n)
\end{aligned}$$

这五个式子加上"逐项求导/积分"的技巧，能生成绝大多数初等函数的展开。注意 $(1+x)^\alpha$ 中取 $\alpha=-1$ 得 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots$，取 $\alpha=\frac12$ 得 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots$，都是常用结论。

**例 2（泰勒公式求极限，比洛必达更快）**

求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$。

**解**：展开到 $x^4$：

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),\qquad e^{-x^2/2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

相减得 $\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)=-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$，故原极限 $=-\dfrac{1}{12}$。

**要点**：分子是"两个展开相减"，必须展开到**不相互抵消的第一项**为止。这里 $x^2$ 项抵消了，所以要展到 $x^4$。展开阶数不足是这类题最常见的错误。

**泰勒 vs 洛必达：怎么选**

**泰勒**适合：$x\to0$、分子分母是若干初等函数加减、需要精确到某阶。一次展开就能看清主部，避免反复求导。**洛必达**适合：型态简单（如 $\frac{\ln x}{x}$、$\frac{e^x}{x^2}$ 当 $x\to\infty$）、求导后明显变简单。经验：遇到 $\cos x-e^{-x^2/2}$ 这种"相消型"，洛必达要连求四次导，几乎必错；直接泰勒两行搞定。

## 3.3 洛必达法则

**定理（$\frac{0}{0}$ 型）**

设 (1) $x \to x_0$ 时 $f(x) \to 0$，$g(x) \to 0$；(2) 在 $x_0$ 的某去心邻域内 $f', g'$ 存在且 $g'(x) \neq 0$；(3) $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 $\infty$），则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**定理（$\frac{\infty}{\infty}$ 型）**

条件与上类似，只需把"$f \to 0, g \to 0$"换成"$g(x) \to \infty$"，结论相同。对 $x \to \infty$ 及单侧极限同样成立。

证明思路：$\frac{0}{0}$ 型用柯西中值定理（补充定义 $f(x_0) = g(x_0) = 0$ 使之连续，再在 $[x_0, x]$ 上用柯西定理），$\frac{\infty}{\infty}$ 型则需另作处理。这条法则的地位是"把未定式转化为导数之比"，本质上仍是中值定理的应用。

### 其余五种未定式的化归

| 型态 | 化归方法 | 示例 |
|---|---|---|
| $0 \cdot \infty$ | 把其中一个写成倒数移到分母 | $x \ln x = \dfrac{\ln x}{1/x}$（$x \to 0^+$） |
| $\infty - \infty$ | 通分，或提取公因子 | $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \sin x}{x \sin x}$ |
| $1^\infty$ | 取对数，或直接用 $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$ | $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ |
| $0^0$、$\infty^0$ | 取对数化为 $0 \cdot \infty$ | $x^x = e^{x \ln x}$ |

$1^\infty$ 型的快捷公式值得单独记：若 $u \to 1$，$v \to \infty$，则 $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$。例如 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$，$v(u-1) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = \frac{\sin x - x}{x^3} \to -\frac{1}{6}$，故极限为 $e^{-1/6}$。

**使用洛必达的四条禁令**

1. **先验型**：不是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 就不能用。$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x}$ 直接是 $\infty$，硬用会得 $\frac{1}{1}=1$，荒谬。
2. **看存在性**：$\lim\frac{f'}{g'}$ 不存在不等于原极限不存在。经典反例：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$，但 $\frac{f'}{g'}=1+\cos x$ 无极限。此时应回到原式：$\frac{x+\sin x}{x}=1+\frac{\sin x}{x}\to 1$。
3. **别循环**：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 求导后得到原式的倒数形式，反复求导原地打转，应分子分母同除 $e^x$。
4. **能化简先化简**：等价无穷小替换、提取非零因子、约分都应放在求导之前。$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ 先替换 $\sin x\sim x$ 会得到 $0$，错；这一题必须用洛必达三次或泰勒，答案 $\frac{1}{6}$。

## 3.4 函数的单调性与极值

### 单调性判定

**定理**

设 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续、在 $(a,b)$ 内可导，则

1. $f'(x)>0$ 在 $(a,b)$ 内 $\Rightarrow$ $f$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增；
2. $f'(x)<0\Rightarrow$ 严格单调减；
3. $f'(x)\geq 0$ 且在任何子区间内不恒为 $0\Rightarrow$ 严格单调增。

证明直接用拉格朗日定理：任取 $x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，符号由 $f'(\xi)$ 决定。所以**单调性判定本质上是拉格朗日定理的推论**，这是本章"用导数反推函数"的第一步。

由此得到标准流程：求 $f'$ → 解 $f'=0$ 得驻点 → 用驻点和不可导点把定义域分段 → 各段判号 → 得单调区间。

**例 3**

求 $f(x)=x^3-3x$ 的单调区间与极值。

**解**：$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，驻点 $x=\pm 1$。

$x<-1$ 时 $f'>0$；$-1<x<1$ 时 $f'<0$；$x>1$ 时 $f'>0$。

故单调增区间 $(-\infty,-1]$、$[1,+\infty)$，减区间 $[-1,1]$。极大值 $f(-1)=2$，极小值 $f(1)=-2$。

### 极值的三个判别工具

**必要条件（费马）**

若 $f$ 在 $x_0$ 取极值且可导，则 $f'(x_0)=0$。称 $f'=0$ 的点为**驻点**。

**注意**：极值点只可能在驻点或不可导点处产生。$y=|x|$ 的极小值点在不可导点，说明"求极值先求驻点"是不完整的。

**第一充分条件（看 $f'$ 变号）**

若 $f$ 在 $x_0$ 连续，在去心邻域内可导：

- $f'$ 由正变负 $\Rightarrow$ 极大值；
- $f'$ 由负变正 $\Rightarrow$ 极小值；
- $f'$ 不变号 $\Rightarrow$ 非极值。

**第二充分条件（看 $f''$）**

若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则 $f''(x_0)<0$ 时取极大值，$f''(x_0)>0$ 时取极小值。

当 $f''(x_0)=0$ 时此判别失效（$y=x^4$ 在 $0$，$y=x^3$ 在 $0$），须退回第一充分条件或泰勒展开判断。

第二充分条件的本质是二阶泰勒展开：$f(x_0+h)-f(x_0)\approx \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$，符号由 $f''$ 决定——这是"泰勒公式可以判极值"的直接体现，也是本书把泰勒放在洛必达之前的用意之一。

### 最大值与最小值

闭区间上连续函数的最值只可能在三种点取得：**驻点、不可导点、区间端点**。做法是把这三种点全部列出，算函数值，取最大和最小。不要用"极值点就是最值点"这种想法，极值是局部概念。

**例 4（实际应用题的标准套路）**

用铁皮做一个体积为 $V$ 的有盖圆柱形罐，问半径与高各为多少时用料最省？

**解**：设半径 $r$，高 $h$，$V=\pi r^2 h \Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$。表面积

$$S(r)=2\pi r^2+2\pi r h=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\quad r>0.$$

$S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=0\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$。$S''(r)=4\pi+\frac{4V}{r^3}>0$，故为极小值也是最小值。此时 $h=\frac{V}{\pi r^2}=2r$，即**高等于直径**时最省料。

应用题的三步：建立目标函数（消去多余变量）→ 确定定义域 → 求最值并说明它确实是最大/最小（用 $S''$ 符号或在定义域端点比较）。第三步常被省略，但它是给分点。

## 3.5 曲线的凸性与函数作图

### 凸性的定义与判定

本书采用的定义：若曲线弧上任意两点间的弧段总位于连接这两点的弦的**下方**，称曲线是**凹**的（或称凸向下、下凸）；反之称**凸**（凸向上）。各教材的"凹凸"叫法相反，务必以本书定义为准——判断时看 $f''$ 的符号最稳妥。

**定理（凸性判定）**

设 $f$ 在 $(a,b)$ 内二阶可导：

- $f''(x)>0\Rightarrow$ 曲线是凹的（下凸，开口向上）；
- $f''(x)<0\Rightarrow$ 曲线是凸的（上凸，开口向下）。

记忆锚点：$y=x^2$ 的 $f''=2>0$，图像开口向上，是本书说的"凹"。把 $y=x^2$ 记住，就不会把凹凸搞反。

**拐点**：曲线凹凸性发生改变的点。必要条件是 $f''(x_0)=0$ 或 $f''$ 不存在；但 $f''(x_0)=0$ 不一定是拐点（$y=x^4$ 在 $0$ 处），必须验证 $f''$ 在该点两侧**变号**。

### 渐近线

| 类型 | 条件 | 求法 |
|---|---|---|
| 水平 | $y=b$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ |
| 垂直 | $x=x_0$ | $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ |
| 斜 | $y=kx+b$（$k\neq0$） | $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ |

求斜渐近线必须**先求 $k$ 再求 $b$**，且两个极限要分别对 $x \to +\infty$ 与 $x \to -\infty$ 考察（两侧可能不同）。水平渐近线是斜渐近线 $k = 0$ 的特例，同一侧不会同时出现两者。

**函数作图的步骤**

1. 确定定义域，考察奇偶性、周期性（可减少一半工作量）。
2. 求 $f'$、$f''$，解出驻点与 $f'' = 0$ 的点，并标出不可导点。
3. 列表：按分点把定义域分段，标出 $f'$、$f''$ 的符号，读出单调性、极值、凹凸性、拐点。
4. 求渐近线（垂直、水平、斜）。
5. 补几个特殊点（与坐标轴交点），描图。

列表法是这一节的核心技能，考试中作图题的分主要给在"表格 + 关键点 + 渐近线"这三样上，图本身反而次要。

## 3.6 平面曲线的曲率

单调性和凹凸性描述曲线的"走向"，曲率描述曲线的"**弯曲程度**"。直线不弯，曲率为 0；半径小的圆弯得厉害，曲率大。

**弧微分**

设曲线 $y = f(x)$，弧长 $s$ 从某定点量起。由 $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，得

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx, \qquad ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

前一式用于 $y = f(x)$，后一式用于参数方程 $x = x(t), y = y(t)$。

这个式子后面在定积分求弧长时还要用一次（第 5 章 5.5 节），现在先把它当"曲率的准备"。

**曲率的定义与计算**

曲率定义为**切线转角对弧长的变化率**：$K = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$，其中 $\alpha$ 是切线的倾角。直观理解：走过单位弧长，切线转过的角度越大，弯得越厉害。

**定理（曲率计算公式）**

若 $y=f(x)$ 二阶可导，则

$$K=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}.$$

若曲线由参数方程 $x=x(t),y=y(t)$ 给出，则

$$K=\frac{|x'y''-y'x''|}{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{3/2}}.$$

**例 5（验证两个基本结论）**

(1) 直线 $y=kx+b$：$y''=0$，$K=0$，与"直线不弯"一致。

(2) 圆 $x^2+y^2=R^2$：参数式 $x=R\cos t$，$y=R\sin t$，$x'^2+y'^2=R^2$，$x'y''-y'x''=R^2$，故

$$K=\frac{R^2}{R^3}=\frac{1}{R}.$$

半径为 $R$ 的圆处处曲率为 $1/R$——这正是"曲率半径"概念的来源。

### 曲率圆与曲率半径

称 $\rho=\dfrac{1}{K}$ 为**曲率半径**。在曲线凹的一侧、沿法线方向取距离 $\rho$ 的点作圆心，以 $\rho$ 为半径作圆，这个圆叫**曲率圆**（密切圆）。它与曲线在该点有相同的切线、相同的曲率，是"最贴合的圆"。

工程上用得很多：火车转弯的曲率半径决定限速，$a=\frac{v^2}{\rho}$；曲线磨削时用曲率圆估计局部形状。这也是本章唯一一个"纯几何"的应用点。

**第 3 章小结：导数的五种用法**

1. $f'$ **的零点 + 变号** → 单调区间与极值（3.4）。
2. $f''$ **的符号** → 凹凸性与拐点（3.5）。
3. $f'$、$f''$ **联合** → 列表作图 + 渐近线（3.5）。
4. $f'$ **的变化率** → 曲率（3.6）。
5. $f'$ **与** $f$ **的关系** → 中值定理、洛必达、泰勒（3.1–3.3），这是理论层，前四项是应用层。

OVERVIEW

# 三章的逻辑主线与学法

把九节、五节、六节压成一条线

三章其实只讲了一个故事：**如何用代数方法研究函数**。第一章造工具（极限），第二章定义工具的第一个产物（导数），第三章用这个产物反推函数的形状。每一环都依赖前一环，断一环后面全是死记硬背。

| 层次 | 核心问题 | 关键工具 | 依赖 |
| --- | --- | --- | --- |
| 第 1 章 | "无限接近"怎么写成式子? | $\varepsilon$-$N$、$\varepsilon$-$\delta$、夹逼、单调有界、两个重要极限 | 实数完备性（确界原理） |
| 第 2 章 | 变化有多快? 变化有多少? | 差商的极限、链式法则、隐函数求导、$dy = f'dx$ | 第 1 章的极限与连续 |
| 第 3 章 | 导数能告诉我们函数的什么? | 费马→罗尔→拉格朗日→柯西、泰勒、洛必达 | 第 2 章的导数与第 1 章的最值定理 |

### 这本书相对其他教材的几处"加厚"

- **数集的界 + 确界原理**（1.1）：把单调有界准则从"承认"变成"证明"，第一章因此有了逻辑起点而不是一堆并列的定义。
- **归结原理**（1.5）：把"极限不存在"这种否定命题转化为可操作的构造，是证明题的重要工具。
- **柯西收敛准则**（1.5）：不预设极限值的收敛判据，理论价值高于计算价值。

- **一致连续性**（1.9）：多数工科教材只提一句，本书单列一节并给出开区间判据，是理解"闭区间连续"威力的最好素材。
- **费马定理作为中值定理体系的起点**（3.1）：把四个中值定理串成一条依赖链，而不是四个孤立公式。
- **泰勒公式置于洛必达之前**（3.2、3.3）：先用泰勒建立"高阶逼近"的观念，再用它解释洛必达与极值判别，逻辑更顺。

### 学习建议（按投入产出排序）

1. **先过计算关**：导数表、复合函数求导、隐函数与参数方程、极限的四类基本型。这部分占考试分值的六成以上，必须做到不假思索。
2. **再补 $\varepsilon$-$\delta$ 语言**：不必追求做难题，但要能独立写出"用定义证明 $\lim \frac{1}{n^2} = 0$"、"用定义证明 $\lim\limits_{x \to 2}(3x - 1) = 5$"这类标准题，并说清每一步的量词。
3. **把中值定理当"套路"记**：见"存在 $\xi$"就想到构造辅助函数；见"不等式"就想到拉格朗日 + 放缩；见"两个函数之比"就想到柯西。
4. **泰勒要背到能用**：五个展开式 + "展开到不抵消的那一项"，能解决大部分极限与极值判断题，比反复洛必达稳得多。
5. **每章末自己画一次逻辑图**：定义 → 定理 → 推论 → 应用，画不出来说明还没串起来。

### 自测：能答上来就算过关

- 为什么 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的证明不能直接用洛必达法则？（循环论证：$\sin$ 的导数公式本身依赖这个极限。）
- $f$ 在 $x_0$ 连续且 $f'(x_0) = 0$，能否断定 $x_0$ 是极值点？（不能，$y = x^3$。）
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 为什么不能用洛必达？（$\frac{f'}{g'}$ 无极限，但原极限存在。）
- $f(x) = x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，为什么不一致连续？（$\left|f\left(n + \frac{1}{n}\right) - f(n)\right| = 2 + \frac{1}{n^2}$ 不趋于 0。）
- 罗尔定理的三个条件各起什么作用？去掉任一条举一个反例。

---

**关于这份笔记**。章节结构依据高等教育出版社官方公布的《高等数学（第二版）（上册）》（武汉大学数学与统计学院编，齐民友主编，ISBN 978-7-04-051307-3，2019 年 5 月第 2 版，372 页 / 420 千字）目录整理；正文为对相应数学知识的

独立讲解与重述，不含原书正文。覆盖范围为第 1–3 章（第 4 章起依次为不定积分、定积分及其应用、反常积分、微分方程）。

**关于电子版**。该书仍在版权保护期内，网络上流传的扫描 PDF 多为未授权版本。正规途径：高等教育出版社数字课程平台（购书附赠数字资源）、中国大学MOOC 上武汉大学相关课程、高校图书馆电子书库（超星、读秀等）。这本教材习题质量较高，建议配合原书做题使用。