期 末 复 习 · 应 试 版

高等数学（上册）第 1–3 章 复习资料

极限与连续 · 导数与微分 · 中值定理与导数的应用

配套教材：齐民友主编 第二版上册（高教社）　通用卷型：计算约七成 / 证明约三成

建议用法：倒计时 3 天通读，考前 1 晚只看第 3、4 节

SECTION 0

考点权重：先看清哪些分必须拿

按题型出现频率和分值把第 1–3 章拆开。**★★★ 是必拿分**，丢了就不是"粗心"而是没复习到；**★★ 是拉开差距的地方**；**★ 只需知道结论**。

章	考点	重要度	常见题型	预估分值
第 1 章	各类未定式求极限（等价无穷小、洛必达、泰勒）	★★★	计算大题	12–18
	间断点求法与分类	★★★	选择/填空	3–5
	分段函数在分界点的连续性与可导性	★★★	计算/证明	6–8
	闭区间连续函数性质证根的存在性	★★	证明	6–8
	ε-N / ε-δ 定义证明、一致连续性	★	证明（少）	0–6
第 2 章	复合函数求导（含多层嵌套）	★★★	计算	8–12
	隐函数、参数方程的一阶与二阶导数	★★★	计算	8–10
	高阶导数与莱布尼茨公式	★★	计算	5–8
	微分与近似计算	★★	填空/小计算	3–5
第 3 章	中值定理证明（存在 ξ 的等式）	★★★	证明大题	10–12
	不等式证明（单调性／拉格朗日／泰勒）	★★★	证明	8–12
	单调性、极值、最值与应用题	★★★	计算/应用	10–15
	凹凸性、拐点、渐近线与作图	★★	计算	6–10
	洛必达法则的适用性辨析	★★	选择/判断	3–5
	曲率、曲率半径、弧微分	★	填空	3–5

复习策略（按分值排序，别按章节顺序）

① 先把 **极限 4 类计算 + 求导 4 类计算**练到不出错，这部分占总分近一半且几乎不设陷阱；② 再攻 **中值定理证明与不等式证明**，这是唯一"不会就空白"的板块，有模板可套；③ 最后补 **作图、曲率、间断点分类**这类小题，靠速查表记住即可。

SECTION 1

公式与结论速查

1.1 等价无穷小（$x \to 0$）：替换的唯一依据

一阶（最常用）	三阶（相消时救命）
$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x$ $\ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x$ $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ $a^x - 1 \sim x \ln a$ $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$ $\sec x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$	$x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{6}$ $\tan x - x \sim \dfrac{x^3}{3}$ $\arcsin x - x \sim \dfrac{x^3}{6}$ $x - \arctan x \sim \dfrac{x^3}{3}$ $\tan x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$ $\ln(1+x) - x \sim -\dfrac{x^2}{2}$ $e^x - 1 - x \sim \dfrac{x^2}{2}$

> **替换的红线**
>
> 只能替换**整个分子或分母中的乘除因子**。加减法中的项若直接替换，可能把主部抵消掉，答案必错。安全做法：先因式分解、提公因式，把加减化成乘除，再替换。
>
> 反例：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$，若把两者都换成 x 得 0；正确是 $\tan x(1-\cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2}$，答案 $\frac{1}{2}$。

1.2 泰勒／麦克劳林展开（带佩亚诺余项）

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + o(x^{2m}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots + o(x^5)
\end{aligned}
$$

> **展开到几阶？一条规则**
>
> **展开到"相减后不抵消的第一项"为止，再往后多展一阶。**判断方法：先看分母是几阶（分母 x^k 就至少展到 k 阶），再看分子各项首项相减后从哪一阶开始不为零。

1.3 导数与高阶导数

函数	导数	函数	导数
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x、a^x	e^x、$a^x \ln a$
$\ln x$、$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\sin x$、$\cos x$	$\cos x$、$-\sin x$
$\tan x$、$\cot x$	$\sec^2 x$、$-\csc^2 x$	$\sec x$、$\csc x$	$\sec x \tan x$、$-\csc x \cot x$
$\arcsin x$、$\arccos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$、$\operatorname{arccot} x$	$\pm\dfrac{1}{1+x^2}$

函数	n 阶导数	用途
e^{ax}	$a^n e^{ax}$	配莱布尼茨公式求乘积的 n 阶导；配泰勒公式求展开系数
$\sin x$、$\cos x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$、$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$	
$\ln(1+x)$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$	
$\dfrac{1}{1+x}$	$\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$	
x^α	$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$	

莱布尼茨公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$。遇到"多项式 × 指数/三角"，多项式求导几次就归零，只剩少数几项。

1.4 中值定理：条件—结论—辅助函数对照

定理	条件	结论	辅助函数／用法
费马	内点取极值 + 可导	$f'(\xi)=0$	是其余三个定理的证明基础，本身单独考得少
罗尔	$[a,b]$ 连续、(a,b) 可导、$f(a)=f(b)$	$\exists\xi,\ f'(\xi)=0$	证"导函数有零点"、证方程根的唯一性
拉格朗日	$[a,b]$ 连续、(a,b) 可导	$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$	$\varphi=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
柯西	同拉氏，且 $g'(x)\neq 0$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$	出现两个函数增量之比时用；也是洛必达的证明工具

三个直接推论（证恒等式与单调性的依据）

① $f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv C$；② $f' \equiv g' \Rightarrow f = g + C$；③ $f' > 0 \Rightarrow$ 严格递增。

用法：要证 $f(x) = C$，先证 $f' \equiv 0$，再代一个方便的点定出 C。例：$\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}$。

1.5 几何应用公式

项目	公式	备注
切线／法线	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$；法线斜率为 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$	$f'(x_0) = 0$ 时法线为竖直线
曲率	$K = \dfrac{\lvert y'' \rvert}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$	参数式：$K = \dfrac{\lvert x'y'' - y'x'' \rvert}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$
曲率半径	$\rho = \dfrac{1}{K}$	圆：$K = 1/R$；直线：$K = 0$
弧微分	$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$	参数式：$\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$
斜渐近线	$k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$，$b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$	必须先 k 后 b，两侧分别讨论
垂直渐近线	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$	通常在分母零点、对数零点处

1.6 常用不等式（证明题的反向武器）

不等式	范围	常用来证
$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$	$x > 0$	对数与有理式的比较
$\sin x < x < \tan x$	$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$	第一个重要极限的证明
$\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x$	$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$	含 $\sin$ 的估计
$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$	$x > 0$	泰勒展开证不等式
$1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x < 1$	$x \neq 0$	余弦的二阶估计
$\ln x \leq x - 1$	$x > 0$	取对数后的放缩

SECTION 2

七类题型的解法模板

每一类都按"看到什么 → 走哪几步 → 卡住了怎么办"来写。考试时按模板走，至少不会空白。

2.1 求极限：先判型，再选工具

决策流程（照着走）

1. **先代入**。是定式就直接得答案（初等函数在定义区间内连续，这是最省时的一步）。
2. **判型**：$0/0$、∞/∞、$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^∞、0^0、∞^0。
3. **先化简再求导**：约分、有理化、提出非零因子、等价替换。这一步能解决七成题。
4. **还不行再上重武器**：加减相消用泰勒；结构简单用洛必达；含 $\sin$、$\ln$、e^x 的加减用泰勒。
5. **数列极限**另走一路：夹逼、单调有界、或化归为函数极限。

型态	首选方法	动作要点
$0/0$（有理式）	因式分解约分／有理化	先看能不能约掉零因子，能约就别求导
$0/0$（含超越函数）	等价无穷小替换（乘除因子）	替换后仍为 $0/0$ 就转泰勒
$0/0$（加减相消）	泰勒展开到不抵消项	分母 x^k 就展到 k 阶
∞/∞（有理式）	分子分母同除最高次幂	看次数比：同次为系数比，分母高为 0
∞/∞（含 $e^x,\ln x$）	洛必达	求导一次看是否变简单，否则改用同除法
$0\cdot\infty$	把一项写成倒数移到分母	选"移到分母后更简单"的那一项
$\infty-\infty$	通分，或提取公因子	根式差用有理化
1^∞	$e^{\lim v(u-1)}$	最快的公式，别急着取对数
0^0、∞^0	取对数化 $0\cdot\infty$	$u^v=e^{v\ln u}$

例（三类典型，看清"为什么选它"）

① **加减相消 → 泰勒**：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$。分母二阶，故展到二阶：$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，分子 $=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，答案 $\dfrac{1}{2}$。（用洛必达要两次，也行，但泰勒一步到位。）

② **三阶相消 → 展到四阶**：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$。$x^2$ 项相消，必须展到 x^4：

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$，$e^{-x^2/2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$，差为 $-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$，答案 $-\dfrac{1}{12}$。

③ **1^∞ → 用公式**：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$。$v(u-1)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)=\dfrac{\sin x-x}{x^3}\to-\dfrac{1}{6}$，答案 $e^{-1/6}$。

洛必达的三条禁令（每年都有人踩）

① **不验型就用**：不是 $0/0$ 或 ∞/∞ 时求导必错。② **求导后极限不存在就断言原极限不存在**：错，如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$，而 $\frac{f'}{g'}=1+\cos x$ 无极限。③ **循环求导**：如 $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，越求越回头，应同除 e^x。

2.2 求导数：五种情形，五种写法

情形	写法要点	典型错误
复合函数	由外向内逐层剥，每层乘一个因子	漏最内层因子（$\sin x^2$ 漏掉 $2x$）
隐函数	两边对 x 求导，遇 y 多乘 y'，再解出 y'	二阶导残留 y'（须代回，只留 x,y）
参数方程	$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$；$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$	写成 $\frac{y''}{x''}$
幂指函数 u^v	取对数或写 $e^{v\ln u}$	当幂函数求（漏 v' 项）
高阶导	先求前两阶找规律，或直接套公式／莱布尼茨	把 $(uv)^{(n)}$ 当成 $u^{(n)}v^{(n)}$

例（四个高频，答案必须背下来）

① $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$。（这类"对数套根号"的结果极简，考频很高。）

② $x^3+y^3-3axy=0$：两边求导 $3x^2+3y^2y'-3a(y+xy')=0$，解得 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$。

③ $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2}$；再对 t 求导并除以 x'_t，得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{4a\sin^4(t/2)}$。

④ $y=x^x$（$x>0$）：$\ln y=x\ln x\Rightarrow\dfrac{y'}{y}=\ln x+1\Rightarrow y'=x^x(\ln x+1)$。

⑤ $\left(x^2e^x\right)^{(20)}=e^x\left[x^2+40x+380\right]$。（通式：$\left(x^2e^x\right)^{(n)}=e^x\left[x^2+2nx+n(n-1)\right]$。）

2.3 中值定理证明题：三步 + 一张构造表

固定三步

1. **看结论里有没有 ξ 的导数**：有 $f'(\xi)$ 且是"两点之差"结构 → 拉格朗日；是"两个函数之比" → 柯西；是"$f'(\xi)=0$" → 罗尔。
2. **构造辅助函数 F**：把结论中的 ξ 换成 x，整理成"某个函数的导数 $=0$"的形式。
3. **写全条件**：F 在闭区间连续、开区间可导、两端点相等——这三句必须写出来，是给分点。

要证的结论	辅助函数 $F(x)$	思路
$f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$F=e^{kx}f(x)$	$F'=e^{kx}[f'+kf]$
$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$	$F=xf(x)$	$F'=f+xf'$
$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$	$F=\dfrac{f(x)}{x}$	$F'=\dfrac{xf'-f}{x^2}$
$f'(\xi)+f(\xi)\tan\xi=0$	$F=f(x)\cos x$	系数为 $\tan$ 时乘 $\cos$
$f'(\xi)-f(\xi)=0$	$F=e^{-x}f(x)$	$k=-1$ 的特例

例（标准写法，可直接模仿）

题：设 f 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$。证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=f(\xi)$。

解：令 $F(x)=e^{-x}f(x)$。则 F 在 $[a,b]$ 连续、(a,b) 可导，且 $F(a)=e^{-a}f(a)=0$，$F(b)=e^{-b}f(b)=0$，故 $F(a)=F(b)$。由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$，即

$$e^{-\xi}\left[f'(\xi)-f(\xi)\right]=0 \implies f'(\xi)=f(\xi).$$

评分点：辅助函数、连续可导、端点相等、罗尔定理结论、代回化形——五处，缺一个扣一处。

双中值问题（存在 $\xi\neq\eta$ 各满足一个式子）

套路：**把区间拆成两段**，在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上各用一次拉格朗日（或一次拉氏 + 一次柯西），c 取中点或题目暗示的点。

例：f 在 $[0,1]$ 连续、$(0,1)$ 可导，$f(0)=0, f(1)=1$。证明存在两个互异的 ξ,η，使

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2.$$

思路：取 $c=\frac{1}{2}$，在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上分别用拉格朗日定理，再相加。

2.4 不等式证明：四选一，先试单调性

方法	适用特征	操作
单调性	一端是常数或 0，另一端是函数	移项令 $F=$ 左 $-$ 右，验证 $F(a)=0$ 且 F' 定号
最值	区间内 F 有唯一驻点	证该驻点是最小（大）值点，且值 ≥ 0
拉格朗日	出现 $f(b)-f(a)$ 或同名函数值之差	对 f 用定理，再对 ξ 的范围放缩
泰勒	含二阶及以上导数，或需要二阶精度	在特殊点展开，用余项符号定号

例（两种方法对比同一题）

题：证明当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$。

法一（单调性）：令 $F(x)=x-\ln(1+x)$，$F(0)=0$，$F'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$（$x>0$），故 F 严格递增，$F(x)>F(0)=0$。

法二（拉格朗日）：对 $\ln(1+t)$ 在 $[0,x]$ 上用定理，$\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$，$0<\xi<x$，故 $\dfrac{x}{1+\xi}<x$。

两种都能满分。单调性更通用，拉格朗日更快——看到"两个函数值之差"优先想拉格朗日。

2.5 极值、最值与应用题

闭区间最值：三类候选点，一个都不能漏

最值只可能在：**驻点（$f'=0$）、不可导点、区间端点**。做法是全部列出算函数值，取最大最小。极值是局部概念，不能拿极值点当最值点。

应用题五步（建模题固定套路）

1. 设变量，画草图，标出已知量与待求量。
2. 写出**目标函数**（要最大／最小的那个量）。
3. 用约束条件**消去多余变量**，化为一元函数。
4. 确定**定义域**（由实际意义给出，常是开区间）。
5. 求驻点 → 判断是极大还是极小（第二充分条件或单调性）→ **回答实际问题**（带单位）。

例（内接矩形，几何最值的代表题）

题：在半径为 R 的圆内作内接矩形，求面积最大值。

解：设矩形在第一象限的顶点为 (x,y)，$x^2+y^2=R^2$，$x\in(0,R)$。面积

$$S=4xy=4x\sqrt{R^2-x^2}.$$

$$S'=4\sqrt{R^2-x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{4(R^2-2x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

令 $S'=0$ 得 $x=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$，此时 $y=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$（正方形）。$x<\frac{R}{\sqrt{2}}$ 时 $S'>0$，$x>\frac{R}{\sqrt{2}}$ 时 $S'<0$，故为最大值，$S_{\max}=2R^2$。

2.6 作图与曲率

作图五步（列表法是得分主体）

1. 定义域、奇偶性、周期性。
2. 求 f'、f''，解出驻点与 $f''=0$ 的点，标出不可导点。
3. 用这些点分段，列**符号表**：f' 定单调与极值，f'' 定凹凸与拐点。
4. 求渐近线（垂直、水平、斜）。
5. 补几个特殊点（与坐标轴交点），描图。

例（$y=\dfrac{x}{1+x^2}$，一题练全）

定义域 $\mathbb{R}$，奇函数，过原点。$y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，驻点 $x=\pm1$；$y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$，$f''=0$ 于 $x=0,\pm\sqrt{3}$。

结论：增区间 $(-1,1)$；极大值 $y(1)=\frac{1}{2}$，极小值 $y(-1)=-\frac{1}{2}$；拐点 $(0,0)$、$\left(\pm\sqrt{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$；水平渐近线 $y=0$（$x\to\pm\infty$）；无垂直渐近线。图形为"双峰对称曲线"。

曲率题：代公式 + 报曲率半径

例：求 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率与曲率半径。

$y'=\dfrac{1}{x}=1$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}=-1$，故 $K=\dfrac{1}{(1+1)^{3/2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，曲率半径 $\rho=2\sqrt{2}$。

2.7 连续性与可导性讨论

分段函数在分界点：先连续，再可导，两步不能并

第一步（连续）：左极限 = 右极限 = 函数值，定出参数。

第二步（可导）：用**定义**算左右导数 $f'_-(x_0)$、$f'_+(x_0)$，二者存在且相等才可导。绝不能用 $x\neq x_0$ 时的导函数公式直接代入 x_0。

例

① 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，求使 f 在 0 处连续与可导的 a。

连续：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，故 $a=1$。可导：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $a=1$ 时可导且 $f'(0)=\frac{1}{2}$。

② 间断点分类：先找出可疑点（分母零点、对数真数零点、分段点），再算左右极限。左右极限都存在的是**第一类**（相等为可去，不等为跳跃）；至少一侧不存在的是**第二类**（无穷或振荡）。

SECTION 3

易错清单：这 18 处，年年有人丢分

按"错在哪 → 正确做法"写。考前扫一遍，比再做十道题有用。

01 **等价无穷小用在加减里。** $\tan x-\sin x$ 直接把两项换成 x 得 0，实际是 $\frac{x^3}{2}$。**正确**：先提公因式变成乘积，再替换。

02 **洛必达不验型。** $\frac{0}{0}$ 才可用，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x}$ 是 $\frac{1}{0}$ 型（发散），硬求导得 1 是荒谬的。**正确**：动笔前先写"此为 $0/0$ 型"。

03 **求导后极限不存在，就说原极限不存在。** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$，但 $\frac{f'}{g'}$ 无极限。**正确**：洛必达只保证"存在时可替换"，失效就回原式化简。

04 **泰勒展开阶数不够。** 分母是 x^4，只展到 x^2 就相减，剩下 $o(x^2)$ 无法定阶。**正确**：展到与分母同阶，且确保主部不再抵消。

05 **把极限与函数值混为一谈。** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 无关，f 在 x_0 可以没定义。**正确**：极限用去心邻域，连续才要求等于函数值。

06 **以为无穷大与无界等价。** $x\sin x$ 当 $x\to\infty$ 无界，但不趋于无穷。**正确**：无穷大要求"从某时刻起全部很大"。

07 **四则运算法则乱拆。** $\lim(f+g)=\lim f+\lim g$ 前提是两个极限**都存在**；$\infty-\infty$ 不能拆。**正确**：先确认存在性再用。

08 **分段点可导性用导函数公式代入。** $x\neq x_0$ 时的 f' 在 x_0 处可能根本不连续。**正确**：分界点一律用定义算左右导数。

09 **参数方程二阶导写成 $\frac{y''}{x''}$。** **正确**：$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$，每求一阶都要再除一次 x'_t。

10 **隐函数二阶导残留 y'。** **正确**：把一阶导结果代回，最终只含 x 与 y。

11 **幂指函数按幂函数求导。** $(x^x)'\neq x\cdot x^{x-1}$。**正确**：取对数或写成 $e^{x\ln x}$。

12 **凹凸叫法反转**。本教材：$f''>0$ 为**凹**（下凸，开口向上）。**正确**：记 $y=x^2$，$f''=2>0$，图像开口向上，即"凹"。

13 **把极值点等同于驻点**。$y=|x|$ 在 0 取极小值但不可导。**正确**：候选点是驻点**和**不可导点。

14 **求最值不看端点**。闭区间上最值可能在端点取得。**正确**：驻点、不可导点、端点三类全部比较。

15 **拐点只要求 $f''=0$**。$y=x^4$ 在 0 处 $f''=0$ 但不是拐点。**正确**：必须验证 f'' 在该点两侧**变号**。

16 **用中值定理漏写条件**。罗尔定理三条件、零点定理的"连续"，少一句就扣分，甚至逻辑不成立。

17 **斜渐近线先求 b 或只算一侧**。**正确**：先 $k=\lim\frac{f(x)}{x}$，再 $b=\lim[f(x)-kx]$，$x\to+\infty$ 与 $-\infty$ 分别讨论。

18 **把微分 dy 与增量 Δy 混为一谈**。dy 是线性主部，$\Delta y=dy+o(\Delta x)$。**正确**：近似计算用 dy，精确增量仍是 Δy。

SECTION 4

答题规范：会做还要写对

题型	必须写出来的内容	最常见的扣分
求极限	① 判型一句话；② 关键变形步骤；③ 结论	跳步太狠，中间等价替换无说明
求导数	链式法则的中间变量可省，但隐函数要写出"两边对 x 求导"	只写答案，过程全无
中值定理证明	① 构造 F；② "在 $[a,b]$ 连续、在 (a,b) 可导"；③ "$F(a)=F(b)$"；④ 由定理得结论	漏写条件；不说明为什么用该定理
不等式证明	① 构造函数并写出端点值；② 求导定号；③ 由单调性得结论	只说"显然"，不证 F' 的符号
应用题	① 设变量与定义域；② 目标函数；③ 求导；④ 判别极大/极小；⑤ 答句带单位	不写定义域；不验证是最大还是最小
作图题	定义域、f'/f'' 符号表、极值点、拐点、渐近线、图形	只画图不列表，符号表缺失
分段函数	连续性与可导性分两段写，左右极限/左右导数分别标注	直接写"连续且可导"，无过程

考前 30 分钟只看这四样

① 等价无穷小表（1.1）与泰勒五个展开（1.2）；② 中值定理辅助函数构造表（2.3）；③ 易错清单第 1、2、8、12、15 条；④ 洛必达三条禁令。

SECTION 5

30 分钟自测（10 题）

难度对标期末卷中档题。做完再对答案，错的那一类回第 2 节找模板。

1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$。

2 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x}$。

3 设 $y=\ln(\cos x)$，求 y'。

4 设 $e^{y}+xy=e$ 确定 $y=y(x)$，求 $y'|_{x=0}$。

5 设 f 在 $[0,1]$ 上连续、$(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=2\xi$。

6 证明当 $x>0$ 时，$e^{x}>1+x$。

7 求 $y=x^{3}-3x^{2}+2$ 的极值。

8 求曲线 $y=\dfrac{x^{2}+1}{x-1}$ 的所有渐近线。

9 求 $y=x^{2}$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率与曲率半径。

10 指出 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点并分类。

答案与要点

1. 分子 $\sim\frac{x^{2}}{2}$，分母 $\sim x^{2}$，极限 $\boxed{\dfrac{1}{2}}$。（乘除因子可替换）

2. $x^{x}=e^{x\ln x}$，$x\ln x\to 0$，故极限 $\boxed{1}$。（0^{0} 型取对数）

3. $y'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=\boxed{-\tan x}$。

4. 两边求导：$e^{y}y'+y+xy'=0$。$x=0$ 时由原式得 $e^{y}=e$，即 $y=1$。代入：$ey'+1=0$，故 $\boxed{y'=-\dfrac{1}{e}}$。

5. 令 $F(x)=f(x)-x^{2}$。F 在 $[0,1]$ 连续、$(0,1)$ 可导，$F(0)=0$，$F(1)=1-1=0$。由罗尔定理，存在 ξ 使 $F'(\xi)=f'(\xi)-2\xi=0$。（结论含 $2\xi\to F=f-x^{2}$）

6. 令 $F(x)=e^{x}-1-x$，$F(0)=0$，$F'(x)=e^{x}-1>0$（$x>0$），F 严格递增，故 $F(x)>0$。

7. $y'=3x(x-2)$，驻点 $0,2$。$y''=6x-6$：$y''(0)<0$ 极大值 $y(0)=2$；$y''(2)>0$ 极小值 $y(2)=-2$。

8. 分母零点 $x=1$，$\lim\limits_{x\to 1}y=\infty$，故 **垂直渐近线** $x=1$；又 $y=x+1+\dfrac{2}{x-1}$，故 **斜渐近线** $y=x+1$。无水平渐近线。

9. $y'=2x=2$，$y''=2$，$K=\dfrac{2}{(1+4)^{3/2}}=\boxed{\dfrac{2}{5\sqrt{5}}}$，$\rho=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$。

10. 仅在 $x=0$ 处无定义。$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 存在，故 $x=0$ 是**可去间断点**（补充定义 $f(0)=1$ 即连续）。

本资料对应教材：齐民友主编《高等数学（第二版）上册》，高等教育出版社，ISBN 978-7-04-051307-3，第 1–3 章。内容为考点归纳与解题方法整理，例题与答案为独立编写，不取自原书习题。

使用建议：第一遍通读第 0、1 节建立框架；第二遍按第 2 节逐类练手；考前只过第 3 节与第 4 节末尾的四样清单。